Φυλλάδιο 2 στην Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ – $\mathbb{R}$-Χώροι, Υποχώροι

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης & Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

1. Επί του $\mathbb{R}^2$, ορίζουμε πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό ως εξής: Αν $u = (u_1, u_2)$ και $v = (v_1, v_2)$, τότε $u + v = (u_1 + v_1 - 1, u_2 + v_2 - 1)$ και $ku = (ku_1, ku_2)$. Δείξτε ότι $(0, 0) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ και ότι $(1, 1) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Είναι το $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-χώρος;

2. Έστω $V = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$. Ορίζουμε πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό επί του V ως εξής: $(x, 1) + (x', 1) = (x + x', 1)$ και $k(x, 1) = (k^2 x, 1)$. Να εξετάσετε αν το V είναι $\mathbb{R}$-χώρος.

3. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω σύνολα είναι $\mathbb{R}$-χώροι, με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό ορισμένες όπως στον χώρο $F(\mathbb{N})$.
   (α′) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F(\mathbb{N}) : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$, το σύνολο όλων των ακολουθιών Fibonacci.
   (β′) Το σύνολο όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών οι οποίες είναι Cauchy. (Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 έτσι ώστε για όλους τους φυσικούς αριθμούς $n, m > n_0$ να ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon$).

4. Ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ είναι $\mathbb{R}$-χώροι;
   (α′) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_3 = a_1 a_2\}$.
   (β′) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : |a_1| > 0\}$.
   (γ′) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$.
   (δ′) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 - a_2 = a_2 - a_3\}$.

5. Ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του $F(\mathbb{R})$ είναι $\mathbb{R}$-χώροι;
   (α′) Το σύνολο όλων των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού $> n$.
   (β′) Το σύνολο όλων των περιττών συναρτήσεων επί του $\mathbb{R}$.
   (γ′) Το σύνολο όλων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων επί του $\mathbb{R}$.

6. Ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του $C[0, 1]$ είναι $\mathbb{R}$-χώροι;
   (α′) $\{f \in C[0, 1] : f(1) = 1\}$.
   (β′) $\{f \in C[0, 1] : f(1) = 0\}$.
   (γ′) $\{f \in C[0, 1] : f(1) = f(0)\}$.
   (δ′) $\{f \in C[0, 1] : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$.

7. Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος. Αν $u \in V$ και $k \in \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε $ku = 0_V$, τότε να αποδείξετε ότι είτε $k = 0$ είτε $u = 0_V$.

8. ΑΛΗΘΕΣ ή ΨΕΥΔΕΣ; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
   (α′) Ένα διάνυσμα είναι ένα βέλος.
   (β′) Ένα διάνυσμα είναι μια διατεταγμένη n-άδα πραγματικών αριθμών.
   (γ′) Ένα διάνυσμα είναι οποιοδήποτε στοιχείο ενός διανυσματικού χώρου.
   (δ′) Υπάρχει διανυσματικός χώρος που αποτελείται από ακριβώς δύο διανύσματα.
   (ε′) Το σύνολο των πραγματικών πολυωνύμων με βαθμό ακριβώς 1 είναι $\mathbb{R}$-χώρος με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό όπως στον $F(\mathbb{R})$.

9. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι υποχώροι του $\mathbb{R}^3$;

   (α′) Όλα τα διανύσματα της μορφής $(a, 0, 0)$.
   (β′) Όλα τα διανύσματα της μορφής $(a, 1, 0)$.
   (γ′) Όλα τα διανύσματα της μορφής (a, b, c), όπου $b = a + c$.
   (δ′) Όλα τα διανύσματα της μορφής $(a, -a, 0)$.

10. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι υποχώροι του $M_n(\mathbb{R})$;

   (α′) Το σύνολο όλων των διαγώνιων $n \times n$ πινάκων.
   (β′) Το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων A με $\mathrm{tr}(A) = 0$, όπου $\mathrm{tr}(A)$ είναι το ίχνος του πίνακα A.
   (γ′) Το σύνολο όλων των αντισυμμετρικών $n \times n$ πινάκων.
   (δ′) Το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων A για τους οποίους το ομογενές σύστημα $AX = 0$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.
   (ε′) Το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων A για τους οποίους $AB = BA$ για κάποιο σταθερό πίνακα $B \in M_n(\mathbb{R})$.

11. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι υποχώροι του $P_3(\mathbb{R})$;

   (α′) Όλα τα πολυώνυμα $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ όπου $a_1 = a_2$.
   (β′) Όλα τα πολυώνυμα $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ όπου $a_0 = 0$.
   (γ′) Όλα τα πολυώνυμα $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ όπου τα a_i, $i = 0, 1, 2, 3$, είναι ακέραιοι.
   (δ′) Όλα τα πολυώνυμα $a_0 + a_1x$ όπου $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

12. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι υποχώροι του $F(\mathbb{N})$;

   (α′) Όλες οι ακολουθίες της μορφής $(a, 0, a, 0, a, 0, \ldots)$, $a \in \mathbb{R}$.
   (β′) Όλες οι ακολουθίες της μορφής $(a, 1, a, 1, a, 1, \ldots)$, $a \in \mathbb{R}$.
   (γ′) $\{(a_n) \in F(\mathbb{N}) : \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n = 0\}$.

13. * Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος και έστω W_1 και W_2 δύο γνήσιοι υποχώροι του V. Να αποδείξετε ότι $V \neq W_1 \cup W_2$.

14. Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος και έστω W_1 και W_2 δύο υποχώροι του V. Να αποδείξετε ότι $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$.

15. Ποιό από τα επόμενα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των $u = (1, -3, 2)$ και $v = (1, 0, -4)$;
   (α) $(0, -3, 6)$, (β) $(3, -9, -2)$, (γ) $(0, 0, 0)$, (δ) $(1, 6, -16)$.

16. Ποιός από τους επόμενους πίνακες είναι γραμμικός συνδυασμός των $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;
   (α) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, (β) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$, (γ) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, (δ) $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -8 & 21 \end{pmatrix}$.

17. Να εκφράσετε σε κάθε περίπτωση το δοθέν διάνυσμα σαν γραμμικό συνδυασμό των $p_1(x) = 2 + x + 4x^2$, $p_2(x) = 1 - x + 3x^2$, $p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2$.
   (α) $-9 - 7x - 15x^2$, (β) $6 + 11x + 6x^2$, (γ) 0.

18. Εξετάστε σε κάθε περίπτωση αν τα δοθέντα διανύσματα παράγουν τον $\mathbb{R}^3$.

    (α) $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (2,0,0)$, $u_3 = (-2,1,0)$,

    (β) $w_1 = (3,2,4)$, $w_2 = (-3,-1,0)$, $w_3 = (0,1,4)$, $w_4 = (0,2,8)$.

19. Ποιό από τα παρακάτω διανύσματα ανήκει στον υποχώρο $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ του $\mathbb{R}^4$, όπου $u_1 = (2,1,0,3)$, $u_2 = (3,-1,5,2)$, $u_3 = (-1,0,2,1)$.

    (α) $(2,3,-7,3)$, (β) $(0,0,0,0)$, (γ) $(1,1,1,1)$.

20. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω πολυώνυμα παράγουν τον $P_2(\mathbb{R})$:

    $p_1(x) = 1 - x + 2x^2$, $p_2(x) = 3 + x$, $p_3(x) = 5 - x + 4x^2$, $p_4(x) = -2 - 2x + 2x^2$.

21. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $u_1 = (1,6,4)$, $u_2 = (2,4,1)$, $u_3 = (-1,2,5)$, και τα διανύσματα $v_1 = (1,-2,-5)$, $v_2 = (0,8,9)$ παράγουν τον ίδιο υποχώρο του $\mathbb{R}^3$.

22. ΑΛΗΘΕΣ Ή ΨΕΥΔΕΣ; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

    (α′) Κάθε υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V που περιέχει το 0_V είναι υποχώρος του V.

    (β′) Το σύνολο λύσεων ενός συμβιβαστού $m \times n$ γραμμικού συστήματος $AX = B$ είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.

    (γ′) Δύο υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου V που παράγουν τον ίδιο υποχώρο του V πρέπει να είναι ίσα.

    (δ′) Το σύνολο όλων των κάτω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$ είναι υποχώρος του $M_n(\mathbb{R})$.

    (ε′) Τα πολυώνυμα $x - 1$, $(x-1)^2$, και $(x-1)^3$ παράγουν τον $P_3(\mathbb{R})$.

23. Μπορεί δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$, καθένα από τα οποία περιέχει δύο διανύσματα, να παράγουν τον ίδιο υποχώρο του $\mathbb{R}^2$;

24. Αν u, v είναι δύο διανύσματα ενός $\mathbb{R}$-χώρου V, W είναι ένας υποχώρος του V, και $u \notin W$ αλλά $u \in \langle W \cup \{v\} \rangle$, τότε έπεται ότι $\langle W \cup \{u\} \rangle = \langle W \cup \{v\} \rangle$;

25. (α) Υπάρχει ένα διάνυσμα που παράγει τον $\mathbb{R}^2$;

    (β) Υπάρχουν δύο διανύσματα που παράγουν τον $\mathbb{R}^3$;

    (γ) Υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων που παράγουν τον $P(\mathbb{R})$;