Φυλλάδιο 3 στην Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Γραμμική εξάρτηση, Γραμμική ανεξαρτησία, Βάση, Διάσταση

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης & Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

1. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι δοθείσες συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες: (α) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \cos x$, (β) $1, x, e^x$, (γ) $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = x\cos x$.

2. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $v_1 = (-1, 2, 3)$, $v_2 = (2, -4, -6)$, $v_3 = (-3, 6, 0)$ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

3. Είναι το σύνολο $S = \{2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 10x - 4x^2\}$ γραμμικά εξαρτημένο υποσύνολο του $P_2(\mathbb{R})$;

4. Για ποιές πραγματικές τιμές του λ είναι τα επόμενα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ γραμμικά εξαρτημένα; $v_1 = (\lambda, -1/2, -1/2)$, $v_2 = (-1/2, \lambda, -1/2)$, $v_3 = (-1/2, -1/2, \lambda)$;

5. Έστω M ένας άνω τριγωνικός πίνακας τέτοιος ώστε κάθε στοιχείο της κυρίας διαγωνίου είναι μη-μηδενικό. Να αποδείξετε ότι οι στήλες του M είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

6. Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος και έστω u, v δύο διακεκριμένα διανύσματα του V. Να αποδείξετε ότι αν το $\{u, v\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε το $\{u + v, u - v\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

7. ΑΛΗΘΕΣ ή ΨΕΥΔΕΣ; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

   (α′) Κάθε μονοσύνολο ενός χώρου είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

   (β′) Κάθε γραμμικά εξαρτημένο σύνολο περιέχει το μηδενικό διάνυσμα.

   (γ′) Το σύνολο όλων των 2×2 πινάκων, οι οποίοι περιέχουν ακριβώς δύο 1 και δύο 0 είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $M_2(\mathbb{R})$.

   (δ′) Αν $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι μη-μηδενικά γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα, τότε τουλάχιστον ένα διάνυσμα v_k γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_{k-1}$.

   (ε′) Τα πολυώνυμα $(x - 1)(x + 2)$, $x(x + 2)$, $x(x - 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   (ϛ′) Οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) = 0$ για κάποια $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

8. Έστω V ο χώρος που παράγεται από τα $v_1 = \cos^2 x$, $v_2 = \sin^2 x$, $v_3 = \cos 2x$.

   (α′) Να αποδείξετε ότι το $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ δεν είναι βάση του V.

   (β′) Βρείτε μια βάση του V, η οποία περιέχεται στο S.

9. Εξετάστε αν τα σύνολα $\{2 - 4x + x^2, 3 + 2x - x^2, 1 + 6x - 2x^2\}$, $\{1 + 2x + x^2, 3 + x^2, x + x^2\}$ είναι βάσεις του $P_2(\mathbb{R})$.

10. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των παρακάτω πινάκων είναι μια βάση του $M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Να δώσετε τρεις διαφορετικές βάσεις για τον $\mathbb{R}^2$ και τον $M_2(\mathbb{R})$.

12. Έστω $V = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 : a + b + c + d + e = 0\}$.

(α′) Να αποδείξετε ότι V είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^5$.

(β′) Να αποδείξετε οτι τα διανύσματα: $x_1 = (2, -3, 4, -5, 2)$, $x_2 = (-6, 9, -12, 15, -6)$, $x_3 = (3, -2, 7, -9, 1)$, $x_4 = (2, -8, 2, -2, 6)$, $x_5 = (-1, 1, 2, 1, -3)$, $x_6 = (0, -3, -18, 9, 12)$, $x_7 = (1, 0, -2, 3, -2)$, $x_8 = (2, -1, 1, -9, 7)$, παράγουν τον V.

(γ′) Να βρείτε ένα υποσύνολο του $\{x_1, \ldots, x_8\}$ το οποίο είναι μια βάση του V.

13. Να βρεθεί το διάνυσμα των συντεταγμένων του $p(x) = 4 - 3x + x^2$ ως προς την βάση $B = \{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$ του $P_2(\mathbb{R})$ (Να ελέγξετε πρώτα ότι B είναι βάση του $P_2(\mathbb{R})$).

14. Να βρεθεί το διάνυσμα των συντεταγμένων του $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ως προς την βάση $B = \{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ του $M_2(\mathbb{R})$ (Να ελέγξετε ότι B είναι όντως βάση του $M_2(\mathbb{R})$).

15. Βρείτε την διάσταση του χώρου όλων των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων.

16. Έστω $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$, όπου $\mathrm{tr}(A)$ το ίχνος του A. Να βρείτε μια βάση και την διάσταση του υποχώρου W του $M_n(\mathbb{R})$.

17. Να καθοριστούν όλοι οι υποχώροι του $\mathbb{R}^3$.

18. Βρείτε την διάσταση του υποχώρου του $P_3(\mathbb{R})$ που αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ για τα οποία $a_0 = 0$.

19. Έστω $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$.

(α′) Να αποδείξετε ότι W είναι υποχώρος του $P_2(\mathbb{R})$.

(β′) Βρείτε μια βάση και την διάσταση του W.

(γ′) Να επεκτείνετε την βάση του W που βρήκατε σε μια βάση του $P_2(\mathbb{R})$.

20. Έστω $v_1 = (1, -4, 2, -3)$, $v_2 = (-3, 8, -4, 6)$.

(α′) Να αποδείξετε ότι το σύνολο $S = \{v_1, v_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(β′) Να επεκτείνετε το S σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

21. Να βρεθεί μια βάση για το επίπεδο $2x + 4y - 3z = 0$ του $\mathbb{R}^3$.

22. Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενοχώρο $N(A)$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

23. Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος με $\dim(V) = n$ και έστω ότι B είναι μια βάση του V. Να αποδείξετε ότι αν $v_1, v_2, \ldots, v_r$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του V, τότε τα διανύσματα $[v_1]_B, \ldots, [v_r]_B$ των συντεταγμένων των $v_1, \ldots, v_r$, αντίστοιχα, είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

24. ΑΛΗΘΕΣ ή ΨΕΥΔΕΣ; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(α′) Υπάρχει μια βάση του $M_2(\mathbb{R})$, η οποία αποτελείται από αντιστρέψιμους πίνακες.

(β′) Ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ είναι άπειρης διάστασης.

(γ′) Υπάρχει ένα σύνολο 11 διανυσμάτων που παράγει τον $\mathbb{R}^{17}$.

(δ′) Υπάρχουν τουλάχιστον δύο υποχώροι του $P_2(\mathbb{R})$ διάστασης 3.

(ε′) Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ είναι διακεκριμένοι πίνακες, τότε το σύνολο $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

25. Έστω $\{x, y\}$ μια βάση για έναν χώρο V. Να αποδείξετε ότι τα σύνολα $\{x+y, ax\}$ και $\{ax, by\}$ είναι βάσεις για τον V, όπου $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

26. Έστω $V = M_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$. Να αποδείξετε ότι W_1, W_2 είναι υποχώροι του V και να βρείτε τις διαστάσεις των W_1, W_2, και $W_1 \cap W_2$. Να επεκτείνετε βάσεις των W_1, W_2 και $W_1 \cap W_2$ σε βάσεις του $M_2(\mathbb{R})$.

27. Έστω V ένας χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω W_1 και W_2 δύο υποχώροι του V τέτοιοι ώστε $V = W_1 + W_2$ και $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ (Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι ο V είναι το **ευθύ άθροισμα** των W_1 και W_2 και γράφουμε $V = W_1 \oplus W_2$). Να αποδείξετε ότι αν B_1 και B_2 είναι δύο ξένες μεταξύ τους βάσεις των W_1 και W_2, αντίστοιχα, τότε το σύνολο $B_1 \cup B_2$ είναι μια βάση του V.

    Αντίστροφα, αν B_1 και B_2 είναι δύο ξένες μεταξύ τους βάσεις δύο υποχώρων W_1 και W_2 ενός χώρου V με $\dim(V) < \infty$ έτσι ώστε $B_1 \cup B_2$ είναι μια βάση του V, τότε να αποδείξετε ότι $V = W_1 \oplus W_2$.

28. Να συμπληρώσετε τις λεπτομέρειες στην απόδειξη του θεωρήματος

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2),$$

    όπου W_1, W_2 είναι υποχώροι ενός χώρου V πεπερασμένης διάστασης.

29. Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω W_1 ένας υποχώρος του V. Να αποδείξετε ότι υπάρχει υποχώρος W_2 του V τέτοιος ώστε $V = W_1 \oplus W_2$.

    Υπόδειξη: Επεκτείνετε μια βάση B του W_1 σε μια βάση B' του V. Θεωρήστε $W_2 = \langle B' \setminus B \rangle$.

30. Να αποδείξετε ότι ένας $\mathbb{R}$-χώρος V είναι άπειρης διάστασης, αν και μόνο αν, ο V περιέχει ένα άπειρο σύνολο S τέτοιο ώστε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του S είναι γραμμικά ανεξάρτητο (ένα άπειρο σύνολο $S \subseteq V$ με αυτή την ιδιότητα καλείται γραμμικά ανεξάρτητο).

31. Έστω W_1 και W_2 δύο υποχώροι ενός $\mathbb{R}$-χώρου V με διαστάσεις m και n, αντίστοιχα, όπου $m \geq n$.

    (α′) Νδο $\dim(W_1 \cap W_2) \leq n$ και $\dim(W_1 + W_2) \leq m + n$.

    (β′) Βρείτε δύο υποχώρους W_1 και W_2 του $\mathbb{R}^3$ για τους οποίους $\dim(W_1 \cap W_2) = n$ και $\dim(W_1 + W_2) = m + n$.

    (γ′) Βρείτε δύο υποχώρους W_1 και W_2 του $\mathbb{R}^3$ για τους οποίους $\dim(W_1 \cap W_2) < n$ και $\dim(W_1 + W_2) < m + n$.