Φυλλάδιο 4 στην Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Γραμμικοί Μετασχηματισμοί
Μέρος Α΄

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης & Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

1. Έστω $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ στροφές (αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού) κατά γωνίες θ_1 και θ_2, αντίστοιχα. Να βρείτε τον πίνακα της σύνθεσης $T_2 \circ T_1$ ως προς την στάνταρντ βάση $\beta = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ του $\mathbb{R}^2$.

2. Έστω $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$ και έστω $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η ορθογώνια προβολή επί του άξονος y. Να αποδείξετε ότι $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$. Με σχήματα, να διευκρινίσετε γραφικά την δράση των $T_1 \circ T_2$ και $T_2 \circ T_1$ επί ενός διανύσματος $x \in \mathbb{R}^2$.

3. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ και έστω $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ο αντίστοιχος μετασηματισμός πίνακα. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ανά δύο ισοδύναμες:

   (α΄) Ο A είναι αντιστρέψιμος.

   (β΄) Ο T_A είναι επί.

   (γ΄) Ο T_A είναι 1-1.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε στροφή $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ κατά γωνία θ είναι 1-1.

5. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας και έστω T_A ο αντίστοιχος μετασχηματισμός επί του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση T_A^{-1} της T_A και $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$.

6. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1 + 4x_2)$. Δείξτε ότι $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ και βρείτε (αν υπάρχει) την αντίστροφη συνάρτηση της T.

7. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Να εξετάσετε αν ο A ορίζει έναν 1-1 μετασχηματισμό πίνακα.

8. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $\det(A) = 0$. Έστω $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ο αντίστοιχος τελεστής πίνακα.

   (α΄) Τί μπορείτε να πείτε για την εικόνα $\mathrm{Im}(T_A)$ του T_A;

   (β΄) Τί μπορείτε να πείτε για το πλήθος των διανυσμάτων, τα οποία ο T_A απεικονίζει στο 0;

9. Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η οποία βρίσκει το συμμετρικό ενός διανύσματος ως προς το xy-επίπεδο, μετά το συμμετρικό αυτού του διανύσματος ως προς το xz-επίπεδο, και μετά το συμμετρικό αυτού του διανύσματος ως προς το yz-επίπεδο. Να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς την στάνταρντ βάση του $\mathbb{R}^3$.

10. Έστω $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ με $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b) + (2d)x + bx^2$. Να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς τις στάνταρντ βάσεις των $M_2(\mathbb{R})$ και $P_2(\mathbb{R})$.

11. Βρείτε έναν γραμμικό τελεστή T επί του $\mathbb{R}^2$ για τον οποίο $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

12. Έστω $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $T(x,y,z) = ax + by + cz$ για όλα τα $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

13. Έστω $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Περιγράψτε γεωμετρικά όλα τα ενδεχόμενα για τον πυρήνα του T.

14. Έστω $T : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ με $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Δείξτε ότι T είναι 1-1 αλλά όχι επί.

15. Έστω V, W πεπερασμένης διάστασης χώροι και έστω $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Να αποδείξετε ότι:

    (α′) Αν $\dim(V) < \dim(W)$, τότε ο T δεν είναι επί.

    (β′) Αν $\dim(V) > \dim(W)$, τότε ο T δεν είναι 1-1.

16. Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος και έστω $T \in \mathcal{L}(V)$. Ένας υποχώρος W του V λέγεται *T-αναλλοίωτος* αν $\forall x \in W$, $T(x) \in W$. Να αποδείξετε ότι οι υποχώροι $\{0\}$, V, $\operatorname{Ker}(T)$, $\operatorname{Im}(T)$ είναι T-αναλλοίωτοι.

17. Έστω V ένας μη-τετριμμένος $\mathbb{R}$-χώρος πεπερασμένης διάστασης. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μη-μηδενικός γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to \mathbb{R}$ (δηλ, υπάρχει $a \in V$, $a \neq 0_V$, τέτοιο ώστε $T(a) \neq 0$). (Ενημερωτικά σημειώνουμε ότι, το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση απειροδιάστατων $\mathbb{R}$-χώρων. Για την απόδειξη όμως, είναι απαραίτητο να υποθέσουμε επιπλέον ότι ισχύει ένα αξίωμα της Θεωρίας Συνόλων, το *Αξίωμα της Επιλογής* (AC), το οποίο διατυπώθηκε από τον Ernst Zermelo το 1904 (AC: Αν $\mathcal{A}$ είναι μια άπειρη οικογένεια από μη κενά σύνολα, τότε υπάρχει μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού την $\mathcal{A}$, η οποία επιλέγει ένα στοιχείο από κάθε στοιχείο της $\mathcal{A}$. Στην περίπτωση της (απλής) άσκησής μας, δεν χρειάζεται να υποθέσουμε το AC). Συναρτήσεις όπως η T παραπάνω ονομάζονται *γραμμικά συναρτησοειδή*.

18. Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ μια (διατεταγμένη) βάση του V. Έστω $T : V \to \mathbb{R}^n$ με $T(x) = [x]_\beta$. Δείξτε ότι $T \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^n)$.

19. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1, 2x_1 + x_2)$. Έστω $A = \{(1,2), (2,3)\}$ και $B = \{(1,1,0), (0,1,1), (2,2,3)\}$. Να αποδείξετε ότι τα σύνολα A και B είναι βάσεις των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, αντίστοιχα και να βρείτε τον πίνακα ${}_A(T)_B$.

20. Έστω V, W δύο $\mathbb{R}$-χώροι και T, S δύο μη-μηδενικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί από τον V στον W. Αν $\operatorname{Im}(T) \cap \operatorname{Im}(S) = \{0\}$, τότε να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{T, S\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{L}(V, W)$.

21. Αν το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$, για ποιά τιμή του λ είναι ογραμμικός μετασχηματισμός T που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$T(v_1) = v_1 + \lambda v_4,$$

$$T(v_i) = 2v_{i-1} + v_i \quad i = 2, 3, 4$$

αντιστρέψιμος;

22. Έστω ότι ο πίνακας ενός γραμμικού τελεστή T επί του $\mathbb{R}^3$ ως προς την στάνταρντ βάση είναι ο $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς την βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$, όπου $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (-2,1,1)$, $v_3 = (1,-1,1)$.

23. Βρείτε έναν γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, του οποίου η εικόνα παράγεται από τα διανύσματα $(1,2,0,-4)$ και $(2,0,-1,-3)$.

24. Βρείτε έναν γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, του οποίου ο πυρήνας παράγεται από τα διανύσματα $(1,2,3,4)$ και $(0,1,1,1)$.

25. Έστω V, W δύο $\mathbb{R}$-χώροι πεπερασμένης διάστασης και έστω $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

(α′) Δείξτε ότι η T είναι 1-1, αν και μόνο αν, η T στέλνει γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του V σε γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του W.

(β′) Έστω ότι η T είναι 1-1 και έστω $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V$. Τότε το S είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν και μόνο αν, $T(S) = \{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του W.