Εξεταση Στο Μαθημα "Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα Ι"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Κατευθυνση Σαχμ
15 Ιουνιου 2015, 9:00πμ–12:00μμ
Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, να επιλύσετε το σύστημα με επαυξημένο πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda & \kappa \\ 1 & \lambda^2 & 2\lambda & \kappa\lambda \end{pmatrix}.$$

(β) Να διατυπώσετε το θεώρημα Cayley–Hamilton. Επιπλέον, για ένα συγκεκριμένο ζεύγος τιμών (κ, λ) για το οποίο το σύστημα στο (α) δέχεται μοναδική λύση, να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα.

ΘΕΜΑ 2. (α) Σωστό ή λάθος; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. Για οποιουσδήποτε πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ισχύουν τα εξής: (1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, (2) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, (3) αν $A^2 = I_n$, τότε $A = I_n$ ή $A = -I_n$.

(β) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A^2 - A + I_n = \mathbf{0}$. Να αποδείξετε ότι οι πίνακες A και $A - 2I_n$ είναι αντιστρέψιμοι.

ΘΕΜΑ 3. (α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cramer, να βρεθεί το όριο $\lim_{t\to+\infty} x_2(t)$, όπου η συνάρτηση $x_2(t)$ ορίζεται από το σύστημα $\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t^2 & 1 & t \\ t & t^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 \\ t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(β) Σωστό ή λάθος; Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και ο πίνακας B προκύπτει από τον A, πολλαπλασιάζοντας κάθε γραμμή του A επί τον αριθμό της γραμμής, τότε $\det(B) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \det(A)$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ και έστω $B = A^3 - 4A^2 + 2I_2$. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του B χωρίς να βρείτε τον B.

(β) Έστω $A \in M_3(\mathbb{R})$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ και έστω $B = A^{17} + 2A^{15} - 3A^2 + 2I_3$. Να βρεθούν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $B = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Να αποδείξετε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός $n \times n$ πίνακα A έχουν τις ίδιες ρίζες.

(β) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A, καθώς επίσης και το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΘΕΜΑΤΟΣ = 2, ΑΡΙΣΤΑ = 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.