Εξεταση Στο Μαθημα "Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα Ι"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Κατευθυνση Σαχμ

28/09/2015, 9πμ–12μμ – Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

2 Μοναδες/Θεμα, Αριστα=10

ΘΕΜΑ 1. (α) Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να επιλύσετε το σύστημα με επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mu & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \mu & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mu & \mu \end{array}\right).$$

(β) Να εξετάσετε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής: "Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με πίνακα συντελεστών A έχει άπειρο πλήθος λύσεων αν και μόνο αν ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με κλιμακωτό πίνακα ο οποίος περιέχει στήλη χωρίς ηγετική μονάδα". Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 2. (α) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Να αποδειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο A^{-1} χρησιμοποιώντας τον $\mathrm{adj}(A)$. Επίσης, να γραφεί ο A ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

(β) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμοι πίνακες και τέτοιοι ώστε ο $A+B$ είναι επίσης αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι $A(A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1} = I_n$. Τι λέει η τελευταία σχέση για τον πίνακα $A^{-1}+B^{-1}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να υπολογιστεί η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

(β) Να διατυπώσετε το θεώρημα Cramer και να το αποδείξετε.

(γ) Έστω $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, n κάποιος φυσικός αριθμός, ένα σύνολο πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής, οι οποίες είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμες. Αν για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f_i = \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j f_j$ για κάποια $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, τότε να αποδείξετε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Να δείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, θεωρώντας $S = \{x^3, |x|^3\}$.

ΘΕΜΑ 4. Έστω $A \in M_3(\mathbb{R})$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$. Να εκφραστούν οι πίνακες A^{-4} και A^8 ως συνάρτηση των πινάκων I_3, A, A^2 και να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές τους. Επίσης, να γράψετε όλα τα δυνατά ενδεχόμενα για το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω $A = \begin{pmatrix} -9 & -6 & -2 & -4 \\ -8 & -6 & -3 & -1 \\ 20 & 15 & 8 & 5 \\ 32 & 21 & 7 & 12 \end{pmatrix}$. Χωρίς να ακολουθήσετε την μέθοδο εύρεσης ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων, να εξετάσετε ποιά από τα διανύσματα $(-1, 1, 0, 1)^t$, $(1, 0, -1, 0)^t$, $(0, 1, -3, 0)^t$ είναι ιδιοδιανύσματα του A. Για εκείνα που είναι ιδιοδιανύσματα, να αναγνωρίσετε τις αντίστοιχες ιδιοτιμές.

(β) Να αποδείξετε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα ενός τετραγωνικού πίνακα A δε μπορεί να αντιστοιχεί σε δύο διαφορετικές ιδιοτιμές του A.

(γ) Να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα που δίνεται στο Θέμα 3(α).