

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ “ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι”
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΕΙΣ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΣΑΧΜ
6 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2017, 9ΠΜ–12ΜΜ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

ΘΕΜΑ 1. (α) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x + \lambda y + \mu z &= 2 \\x + \lambda^2 y + \mu^2 z &= 4\end{aligned}$$

για τις διάφορες πραγματικές τιμές των λ και μ .

(β) Αν $u = (1, 2, 5)$ είναι μια λύση ενός συστήματος $AX = B$ και $v = (0, 1, 1)$ είναι μια λύση του συστήματος $AX = 0$, τότε να βρείτε 5 επιπλέον λύσεις του $AX = B$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $S = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, n κάποιος φυσικός αριθμός, ένα σύνολο πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής, οι οποίες είναι $n - 1$ φορές παραγωγίσιμες. Αν για κάποιο $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j f_j$ για κάποια $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i\}$, τότε να αποδείξετε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \cdots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

(β) Να υπολογίσετε την ορίζουσα n -τάξης, $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, όπου για $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i = \sum_{k=1}^i k$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Αν ο πίνακας $I_n + A$ είναι αντιστρέψιμος, τότε να αποδείξετε ότι ο πίνακας $I_n + A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος και ότι ισχύει η σχέση $(A + I_n)^{-1} + (I_n + A^{-1})^{-1} = I_n$.

(β) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο A^{-1} με τη βοήθεια του

προσαρτημένου πίνακα. Επίσης, να εκφράσετε τον πίνακα A ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Να εκφράσετε τον A^{-1} συναρτήσει των I_3, A, A^2 . Επίσης, να αποδείξετε ότι $A^{2006} - 2A^{2005} = A^2 - 2A$. Ακόμη, να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του A .

(β) ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ: (1) Αν το λ είναι ιδιοτιμή του $A \in M_n(\mathbb{R})$ και το μ είναι ιδιοτιμή του $B \in M_n(\mathbb{R})$, τότε το $\lambda\mu$ είναι ιδιοτιμή του AB , (2) Έστω $A \in M_4(\mathbb{R})$ με $\chi_A(x) = (x+1)^2(x^2+x+1)$. Τότε $\det(A + 2I_4) = 3$.

ΘΕΜΑ 5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ισχύει ότι $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, ενώ δεν ισχύει εν γένει ότι $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΘΕΜΑΤΟΣ = 2 ΜΟΝΑΔΕΣ | ΑΡΙΣΤΑ = 10 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ