

**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ “ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι”**  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ – ΤΜΗΜΑ Σ.Α.Χ.Μ.  
28 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2019, 9:00–12:00  
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

**ΘΕΜΑ 1.** (α) Έστω  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Να βρεθεί ο  $A^n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  (να αποδείξετε τη ζητούμενη ισότητα με επαγωγή).

(β) Για τις διάφορες τιμές των  $u, w \in \mathbb{R}$ , να λυθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x + uy + uz &= w \\x + u^2y + 2uz &= uw\end{aligned}$$

**ΘΕΜΑ 2.** (α) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα Cramer.

(β) Να υπολογιστούν οι ορίζουσες των παρακάτω πινάκων, **χωρίς να τις αναπτύξετε**:

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & (b+c)^2 & bc \\ b^2 & (c+a)^2 & ca \\ c^2 & (a+b)^2 & ab \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 & 1 \\ y & y^2 & y^3 & 1 \\ z & z^2 & z^3 & 1 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**ΘΕΜΑ 3.** (α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $A \in M_n(\mathbb{R})$  (όπου  $n \geq 2$ ) ισχύουν τα εξής:  $\text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$  και  $\det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$ .

(β) Να βρεθεί ο αντίστροφος (αν υπάρχει) του πίνακα  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  με την μέθοδο των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, καθώς και με την μέθοδο του προσαρτημένου (adjoint) πίνακα του  $A$ .

**ΘΕΜΑ 4.** (α) Έστω  $A$  ένας  $n \times m$  πίνακας και  $B$  ένας  $m \times n$  πίνακας. Αν ο  $n \times n$  πίνακας  $I_n - AB$  είναι αντιστρέψιμος, να δείχτεί ότι ο  $m \times m$  πίνακας  $I_m - BA$  είναι επίσης αντιστρέψιμος και ισχύει

$$(I_m - BA)^{-1} = I_m + B(I_n - AB)^{-1}A.$$

(β) Να αποδειχθεί ότι αν  $s$  είναι λύση του γραμμικού συστήματος  $AX = B$  επί του  $\mathbb{R}$ , τότε το σύνολο  $\{s + h : h \text{ είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος } AX = \mathbf{0}\}$  είναι ακριβώς το σύνολο λύσεων του  $AX = B$ . Χρησιμοποιώντας το γεγονός αυτό, να αποδειχθεί ότι αν ένα γραμμικό σύστημα έχει περισσότερο από μια λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

**ΘΕΜΑ 5.** (α) Βρείτε έναν πίνακα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p(x) = -x^3 - 2x^2 + 7x - 4$ . Στη συνέχεια, να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακά σας.

(β) Έστω  $A \in M_3(\mathbb{R})$  με χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\chi_A(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ . Να εκφράσετε κάθε έναν από τους πίνακες  $A^{-4}$  και  $A^8$  ως συνάρτηση των πινάκων  $A$ ,  $A^2$ , και  $I_3$ , και να βρείτε τις ιδιοτιμές τους.

(γ) Να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές, καθώς και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι, του πίνακα  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ .

ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΘΕΜΑΤΟΣ = 2 ΜΟΝΑΔΕΣ  
ΑΡΙΣΤΑ = 10 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ