

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ “ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι”
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΕΙΣ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΣΑΧΜ
21 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017, 12:00–15:00
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω ότι το γραμμικό σύστημα $AX = B$ έχει σύνολο λύσεων

$$S = \{(1, 2, 0, 1) + \kappa(1, 1, 1, 2) + \lambda(0, 1, 2, 1) : \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Να λυθεί το σύστημα $AX = 0$.

(β) Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}x - y + z &= 3 \\x + y + \lambda z &= 1 \\x + \lambda y + z &= \lambda\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2. (α) Η ακολουθία Fibonacci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δίνεται από τον αναδρομικό τύπο $a_1 = a_2 = 1$ και $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$,

$n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Να αποδειχθεί ότι

$\det(A_n) = a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. (Παρατηρήστε ότι $\det(A_1) = 1 = a_2$, $\det(A_2) = 2 = a_3$ και αποδείξτε ότι $\det(A_{n+2}) = \det(A_n) + \det(A_{n+1})$.)

(β) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ με n περιττό φυσικό αριθμό. Αν ισχύει ότι $A^2 + B^2 = \mathbf{O}$, τότε να αποδείξετε ότι οι A και B δεν είναι αντιστρέψιμοι πίνακες.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n$. Να αποδείξετε ότι $AB = BA$.

(β) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο A^{-1} με τη βοήθεια

του προσαρτημένου πίνακα.

ΘΕΜΑ 4. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 5. (α) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Να αποδείξετε ότι $A^5 + 3A^4 = 8A^2 + A - 5I_3$ (χωρίς να υπολογιστούν οι παραπάνω πίνακες).

(β) ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(1) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Αν το -1 είναι ιδιοτιμή του A , τότε υπάρχει μη μηδενικό $S \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ με $A^2 S = S$.

(2) Αν το 2 είναι ιδιοτιμή του A^2 , όπου $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε το $\sqrt{2}$ είναι ιδιοτιμή του A .

(3) Υπάρχει $A \in M_3(\mathbb{R})$ με ιδιοτιμές 0, 1, 2, 3.

ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΘΕΜΑΤΟΣ = 2 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΑΡΙΣΤΑ = 10 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ