Τελικη Εξεταση: "Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα Ι"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Σ.Α.Χ.Μ.

1 Φεβρουαριου 2021, 09:00–12:00

ΘΕΜΑ 1. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες πραγματικές τιμές των α, β, γ για τις οποίες $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, το σύστημα:

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)x + \alpha y - (\gamma+1)z &= \alpha+\beta \\
\beta x + (\alpha+\beta)y + (\beta-\gamma)z &= \beta \\
(2\alpha+\beta)x + (\alpha-\beta)y - (\beta+\gamma+2)z &= 2\alpha+\beta+3
\end{aligned}$$

είναι πάντοτε αδύνατο.

ΘΕΜΑ 2. (α) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Να βρείτε αντιστρέψιμους πίνακες P και Q έτσι ώστε $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_{r(A)} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$.

(β) Έστω A, B δύο τετραγωνικοί πίνακες τέτοιοι ώστε $AB = BA$. Αν ο A είναι μηδενοδύναμος, τότε να αποδείξετε ότι και ο πίνακας AB είναι επίσης μηδενοδύναμος. (Υπενθυμίζεται ότι ένας $n \times n$ πίνακας M λέγεται μηδενοδύναμος αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $M^k = \mathbf{0}$.)

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A(A - I_n) = \mathbf{0}$. Τότε να αποδείξετε ότι ο A είναι μη αντιστρέψιμος ή $\det(A) = 1$.

(β) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε σε κάθε γραμμή του και σε κάθε στήλη του να υπάρχει ένα ακριβώς μη μηδενικό στοιχείο. Να αποδείξετε ότι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του A είναι ίση με την απόλυτη τιμή του γινομένου των n μη μηδενικών στοιχείων του πίνακα A.

(γ) Να αποδείξετε τα ακόλουθα:

(1) Αν $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B)\mathrm{adj}(A)$.

(2) Για κάθε $K, \Lambda \in M_n(\mathbb{R})$ ισχύει ότι $K\mathrm{adj}(K+\Lambda)\Lambda = \Lambda\mathrm{adj}(K+\Lambda)K$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} qr-p^2 & rp-q^2 & pq-r^2 \\ rp-q^2 & pq-r^2 & qr-p^2 \\ pq-r^2 & qr-p^2 & rp-q^2 \end{vmatrix} \geq 0,$$

όπου $p, q, r \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $k \in \mathbb{R}$ ώστε να έχουμε $\det(A) = \lambda$, $\lambda > 0$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{\lambda} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\sqrt{\lambda} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-k \end{pmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 5. (α) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A, το ελάχιστο πολυώνυμο του A και τον A^{-1} (αν υπάρχει) με χρήση του Θεωρήματος των Cayley–Hamilton.

(β) Έστω $U \in M_3(\mathbb{R})$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_U(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$. Να γράψετε τον πίνακα $V = U^{17} + 2U^{15} - 3U^2 + 2I_3$ ως γραμμικό συνδυασμό των πινάκων I_3, U, U^2.

Καλη Επιτυχια!