Τελικη Εξεταση Στο Μαθημα "Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα Ι"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. Κατευθυνση Σαχμ, 3 Φεβρουαριου 2016

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Αν $u = (1,2,5)$ είναι μια λύση ενός γραμμικού συστήματος $AX = B$ και $v = (0,1,1)$ είναι μια λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $AX = \mathbf{0}$, τότε να αποδείξετε ότι το σύστημα $AX = B$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(β) Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα K, ο οποίος ικανοποιεί την σχέση $K^2 + 2K = \mathbf{0}$. Τότε, (1) να λυθεί η εξίσωση $K - X = K \cdot X$, (2) να αποδειχθεί ότι $\det(\operatorname{adj}(K + I_n)) = (\det(K + I_n))^{n-1}$, (3) να προσδιοριστεί ο φυσικός αριθμός n αν ισχύει ότι $\det(K + I_n) = 2$ και $\det(\operatorname{adj}(K + I_n)) = 16$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ο πίνακας A^n, $n \in \mathbb{N}$.

(β) Να υπολογιστούν οι ορίζουσες $\begin{vmatrix} \ln\alpha & \ln 3\alpha & \ln 11\alpha \\ \ln\beta & \ln 3\beta & \ln 11\beta \\ \ln\gamma & \ln 3\gamma & \ln 11\gamma \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ln\alpha & \ln\beta & \ln\gamma & \ln\delta \\ (\ln\alpha)^2 & (\ln\beta)^2 & (\ln\gamma)^2 & (\ln\delta)^2 \\ (\ln\alpha)^3 & (\ln\beta)^3 & (\ln\gamma)^3 & (\ln\delta)^3 \end{vmatrix}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

(γ) Να δώσετε παράδειγμα ενός πίνακα $A \in M_2(\mathbb{R})$, ο οποίος δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Για τον πίνακά σας, να βρείτε όλες τις ιδιοτιμές του στο $\mathbb{C}$ καθώς και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

(δ) Έστω $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Να υπολογιστεί η ορίζουσα $\det(X^3 - 4X^2 + 2I)$, χωρίς να υπολογιστεί ο πίνακας $X^3 - 4X^2 + 2I$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα με επαυξημένο πίνακα $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & 2 \\ 1 & a^2 & b^2 & 4 \end{array}\right)$, για τις διάφορες πραγματικές τιμές των a και b.

(β) Δίνεται ο προσαρτημένος πίνακας του A με $\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Τότε, (1) να εξετάσετε αν ο A είναι αντιστρέψιμος, και αν είναι, τότε να βρεθεί ο A^{-1}, (2) να βρεθεί ο A.

(γ) Έστω ότι ο πίνακας $X \in M_n(\mathbb{R})$ είναι όμοιος προς τον πίνακα $Y \in M_n(\mathbb{R})$ και έστω $q(x)$ ένα πολυώνυμο. Να αποδειχθεί ότι $q(X) = \mathbf{0}$ αν και μόνο αν $q(Y) = \mathbf{0}$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $M = \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ (όπου i η φανταστική μονάδα). Να βρεθεί ο πίνακας $M^{-1} + I_2$ και να εξεταστεί αν το διάνυσμα $(1,i)^t$ είναι ιδιοδιάνυσμα του τελευταίου πίνακα.

(β) Ποιές από τις επόμενες προτάσεις είναι αληθείς; **(1)** Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ πίνακας και $A^t = -A$, τότε $\det(A) = 0$, **(2)** Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ πίνακας και $A^2 = A$, τότε $A = I_n$ ή $A = \mathbf{0}$, **(3)** Αν $A \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$ με βαθμό 3, τότε το σύστημα $AX = B$ είναι συμβιβαστό για κάθε $B \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$, **(4)** Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε το γινόμενο $A \cdot A^t$ είναι πάντα συμμετρικός πίνακας, **(5)** Αν $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε $(A + B^{-1})^{-1} = A^{-1} + B$, **(6)** Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$, **(7)** Αν $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, τότε $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(γ) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Να αποδειχθεί ότι οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

! Πρεπει να επιλεξετε τουλαχιστον ενα απο τα θεματα 1-2 και τουλαχιστον ενα απο τα θεματα 3-4

Βαθμος καθε θεματος: 2.5 μοναδες – Διαρκεια εξετασης: 3 ωρες

Καλη επιτυχια