

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ - ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΣΑΧΜ

4 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2015

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ, ΕΥΤΥΧΙΑ ΜΑΜΖΕΡΙΔΟΥ

ΘΕΜΑ 1. Έστω $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. (α) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A και οι ιδιοχώροι του A .

(β) Με την βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton, να υπολογιστεί ο πίνακας $A^6 - A^5 - 19A^4 + 42A^3 - 41A^2 + 110A - 40I_3$ και να βρεθεί ο αντίστροφος του A (αν υπάρχει).

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε $A^r = \mathbf{0}$ για κάποιο $r \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(β) Να αποδείξετε ότι ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν για κάθε $B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση.

ΘΕΜΑ 3. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Να αποδειχθεί ότι $\det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ , να μελετήσετε το σύστημα με επαυξημένο πίνακα

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cramer, να βρεθεί η τιμή του t για την οποία ελαχιστοποιείται το $x_3(t)$ στο σύστημα $\begin{pmatrix} t & 0 & 1/t \\ 0 & t & t^2 \\ 1 & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/t \\ 1/t^2 \end{pmatrix}$

ΘΕΜΑ 5. (α) Να δοθεί ο ορισμός του ελάχιστου πολυωνύμου ενός $n \times n$ πίνακα A .

(β) Να δείξετε ότι αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και A είναι αντιστρέψιμος, τότε λ ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $1/\lambda$ ιδιοτιμή του A^{-1} .

(γ) Έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ και έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας. Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A και u ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε να αποδείξετε ότι $p(\lambda)$ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα $p(A)$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα u .

(δ) Να δείξετε ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A πολλαπλότητας r , τότε το 0 είναι μια ιδιοτιμή του $A - \lambda I$ πολλαπλότητας r .

ΘΕΜΑ 6. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Αν ο πίνακας $I_n - AB$ είναι αντιστρέψιμος, τότε να δείξετε ότι και ο πίνακας $I_n - BA$ είναι αντιστρέψιμος και $(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$.

ΘΕΜΑ 7. (α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση (με άγνωστο το x) $\begin{vmatrix} 23 & 1 & x & x^2 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ k & 7 & 1 & x \\ 23 & \lambda & 30 & 1 \end{vmatrix} = 0$, δεν έχει λύση στο $\mathbb{Z}$.

(β) Να αποδείξετε ότι αν $\det(A) = 1$ και όλα τα στοιχεία του A είναι ακέραιοι αριθμοί, τότε και όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραιοι αριθμοί.

ΘΕΜΑ 8. (α) Να αποδείξετε ότι αν s είναι μια λύση του συστήματος $AX = B$, τότε το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι $\{s + u : u \text{ είναι λύση του } AX = \mathbf{0}\}$. Χρησιμοποιώντας το τελευταίο, να αποδείξετε ότι αν το $AX = B$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(β) Να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, χρησιμοποιώντας μόνο στοιχειώδεις πίνακες.

ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΜΟΝΟ ΠΕΝΤΕ ΑΠΟ ΤΑ ΟΚΤΩ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.