Προαιρετικη Προοδος Στην Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα Ι

Πανεπιστημιο Αιγαιου - Τμημα Μαθηματικων
Εισαγωγικη Κατευθυνση Σαχμ
19 Ιανουαριου 2015
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης, Ευτυχια Μαμζεριδου

ΘΕΜΑ 1. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}$ ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gauss–Jordan, να λυθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$. Επίσης, για όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα A.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να διατυπώσετε το θεώρημα Cramer.

(β) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cramer, να λύσετε το εξής πρόβλημα: Ένα ξενοδοχείο έχει x_1 μονόκλινα, x_2 δίκλινα, και x_3 τρίκλινα δωμάτια. Αν το πλήθος των δωματίων είναι 22, το πλήθος των κλινών 39 και το πλήθος των δίκλινων δωματίων είναι ίσο με το πλήθος των μονόκλινων και τρίκλινων δωματίων μαζί, τότε να βρεθεί ο αριθμός των μονόκλινων, δίκλινων και τρίκλινων δωματίων. Επίσης, να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων του γραμμικού συστήματος που θα θεωρήσετε (για το πρόβλημα) χρησιμοποιώντας την μέθοδο του adjoint και την μέθοδο στην θεωρία των ιδιοτιμών πίνακα.

ΘΕΜΑ 3. (α) Αν για τον τετραγωνικό πίνακα A ισχύει ότι $A^2 = A$, τότε να αποδείξετε ότι ο πίνακας $2A - I$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

(β) Σωστό ή λάθος:

(β1) Αν $u = (2, 1, \sin(\sqrt{2}))$ είναι μια λύση του συστήματος $AX = B$ και $(0, 0, 0)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος $AX = \mathbf{0}$, τότε ο βαθμός $r(A|B)$ του επαυξημένου πίνακα του $AX = B$ μπορεί να είναι μικρότερος του 3.

(β2) Αν $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ είναι τέτοιοι ώστε $A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n$, τότε $AB = BA$.

(β3) Αν ο A έχει μια γραμμή από μηδενικά, τότε και ο $\mathrm{adj}(A)$ έχει μια γραμμή από μηδενικά.

(β4) Το άθροισμα δύο ιδιοτιμών του A είναι ιδιοτιμή του A.

(β5) Αν $E \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ένας στοιχειώδης πίνακας και $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας τυχαίος πίνακας, τότε οι πίνακες EA και AE έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

ΘΕΜΑ 4. Έστω $A \in M_3(\mathbb{R})$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $p(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$. Να απλοποιηθεί ο πίνακας $B = A^{17} + 2A^{15} - 3A^2 + 2I_3$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, όπου $a_{ij} = 1$ για όλα τα $i = 1, \ldots, n$ και όλα τα $j = 1, \ldots, n$. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A και ο ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί στην μικρότερη ιδιοτιμή του A.

(β) Σωστό ή λάθος: Αν το 0 δεν είναι ρίζα του *ελάχιστου* πολυωνύμου ενός $n \times n$ πίνακα A, τότε είναι δυνατόν να υπάρχει ένας $n \times 1$ πίνακας B τέτοιος ώστε το γραμμικό σύστημα $AX = B$ να είναι αδύνατο.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Βαθμος καθε θεματος = 5.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.