

ΤΕΣΤ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ “ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι”

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΣΑΧΜ

18/01/2016 – ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

ΘΕΜΑ 1. (α) Για τις διάφορες τιμές των $r, s \in \mathbb{R}$, να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα με επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r & s \\ 1 & r^2 & 2r & rs \end{array} \right).$$

(β) Να αποδειχθεί ότι αν $\mathbf{u}$ είναι μια λύση του γραμμικού συστήματος $AX = B$, και αν Λ συμβολίζει το σύνολο λύσεων του $AX = B$, τότε

$$\Lambda = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{v} \text{ είναι λύση του ομογενούς συστήματος } AX = \mathbf{0}\}.$$

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και n κάποιος φυσικός αριθμός. Να αποδειχθεί ότι $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(β) Να υπολογιστεί η ορίζουσα
$$\begin{vmatrix} 1 + a_1b_1 & 1 + a_1b_2 & 1 + a_1b_3 \\ 1 + a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & 1 + a_2b_3 \\ 1 + a_3b_1 & 1 + a_3b_2 & 1 + a_3b_3 \end{vmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 3. (α) Ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ο $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & b & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & c \end{pmatrix}$.

Ποιός αριθμός είναι το άθροισμα $a + b + c$;

(α) 0

(β) $-1/3$

(γ) $-2/3$

(δ) $1/3$

(ε) $2/3$

(Να μη χρησιμοποιήσετε την σχέση $AA^{-1} = I_3$, αλλά ούτε και την μέθοδο Gauss–Jordan).

(β) Αν για τον τετραγωνικό πίνακα A ισχύει ότι $A^2 = A$, τότε να αποδείξετε ότι ο πίνακας $2A - I$ είναι αντιστρέψιμος.

ΘΕΜΑ 4. (α) Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς για πίνακες $A \in M_n(\mathbb{R})$;

(i) αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A , τότε $-\lambda$ είναι μια ιδιοτιμή του $-A$.

(ii) αν $\mathbf{u}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A , τότε το $\mathbf{u}$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του $2A$.

A. (i) και (ii)

B. Μόνο η (i)

Γ. Μόνο η (ii)

Δ. Καμία από τις (i) και (ii)

(β) Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A .

ΘΕΜΑ 5. Σωστό ή λάθος;

(α) Αν $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ και A αντιστρέψιμος, τότε οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

(β) Ο τετραγωνικός πίνακας A και ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας R_A του A έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

- (γ) Αν το $m \times n$ γραμμικό σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση, τότε $m \geq n$.
- (δ) Αν ο $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A έχει λιγότερο από $n^2 - n$ μηδενικά.
- (ε) Αν ο $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A έχει το πολύ $n^2 - n$ μηδενικά.
- (ζ) Αν ο A είναι διαγώνιος πίνακας και $\{-3, 1, 2\}$ είναι το σύνολο των διαγώνιων στοιχείων του, τότε $\det(A) = -6$.

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑ ΔΤΟ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΚΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ΩΡΕΣ
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ