

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ: “ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι”

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ – ΤΜΗΜΑ Σ.Α.Χ.Μ.

21 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2020, 09:00–11:00

ΘΕΜΑ 1. (α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)x + 2y + \lambda z &= \lambda \\ x + \lambda y + 2z &= 2 \\ (2\lambda + 1)x + (3\lambda + 4)y + (\lambda + 8)z &= 4\lambda + 2\end{aligned}$$

Για τις τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση, να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο του Cramer για να βρείτε τη μοναδική λύση.

(β) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τον πίνακα A^n και να υπολογίσετε το άθροισμα $A + A^2 + \dots + A^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Να δώσετε ένα παράδειγμα τετραγωνικού πίνακα A για τον οποίο ισχύει ότι $A^2 = A$ και $A \neq O, I$. Τι συμπέρασμα βγάζετε;

ΘΕΜΑ 2. (α) Αν ο πίνακας A είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$2X^2 - 3X - I_n = O_n$$

τότε να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A - I_n$ είναι αντιστρέψιμος και να βρείτε τον αντίστροφό του.

(β) Να εξετάσετε αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος, και αν είναι τότε να βρείτε τον αντίστροφό του και να γράψετε τον A ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

ΘΕΜΑ 3. Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες των οριζουσών για να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 1+a & b+2 & b-a+1 \\ 1-a & 2a+1 & 3a \\ 1+a & a-b & -b-1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 4. Δίνεται ότι $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ και $\det(A^{-1}) = 3$. Να βρείτε τον πίνακα A .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!