Τελικη Εξεταση στο Μαθημα "Στοιχεια Θεωριας Μετρου"

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Μαθηματικων
Εισαγωγικη Κατευθυνση Στατιστικης & Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
17 Ιουνιου 2014 - 15:00-18:00
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία Lebesgue-μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Αν $m(E_1) < \infty$, τότε να αποδείξετε ότι $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$. Να αποδείξετε επίσης ότι η συνθήκη "$m(E_1) < \infty$" είναι απαραίτητη για το προηγούμενο αποτέλεσμα.

(β) Να αποδείξετε ότι το μέτρο Lebesgue m είναι αριθμήσιμα προσθετικό αν και μόνο αν για κάθε αύξουσα ακολουθία $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Lebesgue-μετρήσιμων συνόλων ισχύει ότι $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

ΘΕΜΑ 2. Να αποδειχθεί το θεώρημα Egorov: Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ορισμένες επί ενός μετρήσιμου συνόλου E πεπερασμένου μέτρου. Έστω ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά σχεδόν παντού επί του E σε μια συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$. Τότε $\forall\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$ με $m(A) < \varepsilon$ και τέτοιο ώστε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $E \setminus A$ στην f.

Με κατάλληλο παράδειγμα, να δείξετε ότι το αποτέλεσμα δεν ισχύει εν γένει αν $m(E) = \infty$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη επί του $[a,b]$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι Lebesgue-ολοκληρώσιμη επί του $[a,b]$ και ισχύει ότι $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f$.

(β) Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in C \cap \mathbb{Q}^c \\ x & x \in C \cap \mathbb{Q}, \\ 1 & x \notin C \end{cases}$ όπου $x \in [0,1]$ και C το σύνολο του Cantor. Να αποδειχθεί ότι η f είναι Lebesgue-ολοκληρώσιμη επί του $[0,1]$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{[0,1]} f$. (Το αποτέλεσμα της θεωρίας που θα χρησιμοποιήσετε, να το αποδείξετε).

(γ) Έστω $f(x) = e^x$, $x \in [0, \ln 2]$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$, να βρεθούν δύο απλές συναρτήσεις ϕ, ψ, τέτοιες ώστε $\phi \le f \le \psi$ και $\int_{[0,\ln 2]}(\psi - \phi) < \varepsilon$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^2} = 1$. (*Υπόδειξη*: Να θεωρήσετε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{1}{x^2}$ αν $x \in [1,n]$, και 0 διαφορετικά. Να διατυπώσετε τα αποτελέσματα της θεωρίας που θα χρησιμοποιήσετε.)

(β) Έστω f μια μη αρνητική και μετρήσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η συνολοσυνάρτηση $\mu(E) = \int_E f$, E Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, είναι αριθμήσιμα προσθετική. Να διατυπώσετε το αποτέλεσμα της θεωρίας που θα χρησιμοποιήσετε.

Βαθμος καθε θεματος = 2.5
Αριστα = 10
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ