**Εξεταση στο Μαθημα "Θεωρια Μετρου"**

Πανεπιστημιο Αιγαιου

Τμημα Μαθηματικων

Μεταπτυχιακο Προγραμμα Σπουδων: Στατιστικη & Αναλογιστικα–Χρηματοοικονομικα Μαθηματικα

8 Ιουνιου 2015 – 12:00μμ εως 15:00

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

**ΘΕΜΑ 1.** (α) Να αποδειχθεί ότι το μέτρο Lebesgue είναι (α) $\sigma$-προσθετικό, (β) αναλλοίωτο κατά την μεταφορά (αποδεικνύοντας πρώτα ότι η μεταφορά ενός μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμο).

(β) Να δώσετε τους δύο ορισμούς του συνόλου του Cantor. Επίσης, να αποδείξετε ότι το σύνολο του Cantor είναι ένα τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ μέτρου 0.

**ΘΕΜΑ 2.** (α) Να αποδείξετε ότι αν $E$ είναι μετρήσιμο και $E \subset P$, όπου $P$ το σύνολο επιλογής στην απόδειξη του Vitali για την ύπαρξη μη μετρήσιμου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$, τότε $m(E) = 0$.

(β) Να δοθεί ένα παράδειγμα όπου $(E_i)$ είναι μια ξένη ακολουθία συνόλων με $m^*(\bigcup E_i) < \sum m^*(E_i)$. Επίσης, να δοθεί παράδειγμα ακολουθίας συνόλων $(E_i)$ τέτοιας ώστε $E_i \supset E_{i+1}$, $m^*(E_i) < \infty$, και $m^*(\bigcap E_i) < \lim m^*(E_i)$.

**ΘΕΜΑ 3.** (α) Να δοθεί ο ορισμός της μετρήσιμης συνάρτησης. Επίσης, να αποδειχθεί ότι κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού μετρήσιμο σύνολο είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Να δώσετε ένα παράδειγμα ότι το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.

(β) Να κατασκευάσετε μια συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}^e$, $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο, τέτοια ώστε η $f$ να ικανοποιεί την πρόταση "για κάθε επεκταμένο πραγματικό αριθμό $a$, το σύνολο $\{x : f(x) = a\}$ είναι μετρήσιμο", αλλά να μην ικανοποιεί την πρόταση "για κάθε πραγματικό αριθμό $a$, το σύνολο $\{x : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο".

**ΘΕΜΑ 4.** (α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Egorov. Επίσης, με κατάλληλα παραδείγματα να δείξετε ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι δυνατόν να μην ισχύει αν δεν απαιτήσουμε το μετρήσιμο σύνολο $E$ του θεωρήματος να είναι πεπερασμένου μέτρου ή αν δεν απαιτήσουμε η συνάρτηση $f$ του θεωρήματος να είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού.

(β) Να αποδειχθεί ότι κάθε μετρήσιμο σύνολο γράφεται ως ένωση $A \cup B$, όπου $A$ σύνολο του Borel και $B$ σύνολο μέτρου 0.

**ΘΕΜΑ 5.** (α) Έστω $f(x) = e^x$, $x \in [0, \ln 2]$. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue επί του $[0, \ln 2]$ χρησιμοποιώντας το κριτήριο ολοκλήρωσης του Lebesgue. Ποιά είναι η τιμή του ολοκληρώματος $\int_{[0,\ln 2]} f$;

(β) Έστω $f$ μια φραγμένη συνάρτηση επί ενός συνόλου $E$ πεπερασμένου μέτρου. Να αποδείξετε ότι αν η $f$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη επί του $E$, τότε η $f$ είναι μετρήσιμη επί του $E$.

Βαθμος καθε θεματος = 2

Αριστα = 10

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**