Εξεταση στο Μαθημα "Στοιχεια Θεωριας Μετρου"
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Μαθηματικων
Εισαγωγικη Κατευθυνση Στατιστικης & Αναλογιστικων–Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
22 Σεπτεμβριου 2014 – 12:00–15:00
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. Έστω $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, όπου $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ το δυναμοσύνολο του $\mathbb{R}$. Να υποδείξετε όλα τα σημεία της απόδειξης στα οποία χρησιμοποιήσατε το Αξίωμα της Επιλογής, το οποίο και να διατυπώσετε.

ΘΕΜΑ 2. Έστω $f : E \to \mathbb{R}^e$ $(= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$, E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, μια συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι μετρήσιμη, τότε $\forall a \in \mathbb{R}^e$, το σύνολο $\{x : f(x) = a\}$ είναι μετρήσιμο. Να αποδείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει κατασκευάζοντας μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $\{x : f(x) > 0\}$ είναι μη (Lebesgue) μετρήσιμο σύνολο, και τέτοια ώστε η f λαμβάνει κάθε τιμή της το πολύ μια φορά.

ΘΕΜΑ 3. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το E είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $O \supseteq E$ με $m^*(O \setminus E) < \varepsilon$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{[0,\infty)} e^{-t}$ χρησιμοποιώντας κατάλληλα το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης του Lebesgue.

(β) Ορίζεται το ολοκλήρωμα Lebesgue για την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x \leq 1 \\ 1/(x-2), & 1 < x < 2 \end{cases}$;

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού (δηλαδή, $m(\{x : f(x) = \infty\}) = 0$).

ΘΕΜΑ 5. Να αποδείξετε το Λήμμα Fatou: Αν (f_n) είναι μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε $\int(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$. Να αποδείξετε επίσης ότι είναι δυνατό να έχουμε γνήσια ανισότητα στο Λήμμα Fatou, θεωρώντας $f_n = \chi_{[n,n+1)}$.

Βαθμος καθε θεματος = 2
Αριστα = 10
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ