

ΘΕΜΑ 1. α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ στο διάστημα $[2, 3]$ και ότι το επαναληπτικό σχήμα $x_{n+1} = 2 + 1/x_n^2$ συγκλίνει στην ρ για $x_0 \in [2, 3]$.

β) Η εξίσωση $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 0$ έχει πέντε ρίζες στο διάστημα $[0, 7]$. Αν εφαρμοστεί η μέθοδος της διχοτόμησης στο διάστημα αυτό, σε ποιά από τις ρίζες συγκλίνει η μέθοδος; Να παρουσιάσετε αναλυτικά τα βήματα του επιχειρήματός σας.

γ) Δίδεται η $f(x) = x^3 - 7$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει στην $\sqrt[3]{7}$ για κάθε αρχική πρόβλεψη $x_0 > 0$ και να βρεθεί η τάξη σύγκλισης. Συγκλίνει η μέθοδος για κάθε $x_0 < 0$;

ΘΕΜΑ 2. Δίδονται $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ και $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Να εφαρμόσετε 5 διαδοχικές επαναλήψεις της μεθόδου των δυνάμεων για να προσεγγίσετε την μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή λ του A και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Να βρεθεί ο ελάχιστος θετικός ακέραιος k για τον οποίο το εκτιμώμενο σχετικό σφάλμα της προσέγγισης $\lambda \cong \lambda^{(k)}$ είναι μικρότερο από 0.1%.

ΘΕΜΑ 3. Να δοθεί ο αλγόριθμος της LU -παραγοντοποίησης τετραγωνικού πίνακα A που ανάγεται σε άνω τριγωνικό πίνακα με την μέθοδο απαλοιφής Gauss χωρίς εναλλαγές γραμμών. Να εφαρμοστεί ο

παραπάνω αλγόριθμος για να βρείτε μια LU -παραγοντοποίηση του $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. Είναι μοναδική η LU -παραγοντοποίηση που βρήκατε για τον A ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 4. α) Να περιγραφεί η γενική επαναληπτική μέθοδος αριθμητικής επίλυσης $n \times n$ γραμμικού συστήματος $AX = B$, όπου A αντιστρέψιμος, και να δοθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη σύγκλισης της παραγόμενης ακολουθίας διανυσμάτων.

β) Δίδεται ο επαυξημένος πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ενός 4×4 γραμμικού συστήματος.

Να αποδείξετε ότι εφαρμόζοντας την επαναληπτική μέθοδο του Jacobi, οδηγούμαστε σε σύγκλιση προς την μοναδική λύση του συστήματος για οποιοδήποτε αρχικό διάνυσμα x_0 . Να παρουσιάσετε όλους τους πίνακες που χρειάζονται για την εφαρμογή της μεθόδου και για την ανωτέρω απόδειξη.

i	x_i	y_i
0	2	7.32
1	4	8.24
2	6	9.20
3	8	10.19
4	10	11.01
5	12	12.05

ΘΕΜΑ 5. Δίδεται ο εξής πίνακας δεδομένων:

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, να προσαρμόσετε μια ευθεία στα παραπάνω ζεύγη τιμών.

ΘΕΜΑ 6. Να γραφεί κώδικας στη C++ με τον οποίο θα εφαρμόζεται η μέθοδος του Simpson για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^1 4e^{-x^2} dx$.