

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ “ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ”

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ, ΤΜΗΜΑ ΣΑΧΜ

17 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012 – ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ (12:00 – 15:00)

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

ΘΕΜΑ 1. (α) Δίνεται η μη-γραμμική εξίσωση $x^3 - x - 1 = 0$. Σχεδιάζοντας το γράφημα της $f(x) = x^3 - x - 1$, να εκτιμήσετε τί θα συμβεί αν εφαρμόσουμε την μέθοδο Newton-Raphson (για την εύρεση της μοναδικής ρίζας της $f(x) = 0$) με αρχικές τιμές $x_0 = -2$, $x_0 = 0$ και $x_0 = 2$. Να δώσετε πλήρη απόδειξη για το γεγονός ότι η μέθοδος συγκλίνει για $x_0 = 2$ και να βρεθεί η τάξη σύγκλισης της μεθόδου. (1.4M)

(β) Να περιγράψετε την μέθοδο της διχοτόμησης και να δώσετε τις προϋποθέσεις εφαρμογής της μεθόδου. Γιατί συνηθίζουμε να εφαρμόζουμε πρώτα την μέθοδο διχοτόμησης για την εύρεση ρίζας μιας μη-γραμμικής εξίσωσης $f(x) = 0$ και μετά από κάποιες επαναλήψεις αλλάζουμε σε Newton-Raphson; (0.6M)

ΘΕΜΑ 2. (α) (1M) Να εφαρμοστεί η προς τα εμπρός απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση κατά στήλη

για να επιλυθεί το σύστημα $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Επίσης, να δώσετε και να εξηγήσετε

τον γενικό τύπο του συνόλου των πράξεων που απαιτούνται για την προς τα εμπρός απαλοιφή Gauss και πίσω αντικατάσταση.

(β) (1M) Δίδονται $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ και $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Να εφαρμόσετε 3 διαδοχικές επαναλήψεις της μεθόδου των δυνάμεων (όλοι οι υπολογισμοί με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων) για να προσεγγίσετε την κυρίαρχη (μέγιστη κατά απόλυτη τιμή) ιδιοτιμή λ του A και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Να βρεθούν οι ακριβείς τιμές της ιδιοτιμής και του ιδιοδιανύσματος που προσεγγίστηκαν. Να βρεθεί το % σφάλμα στην προσέγγιση της κυρίαρχης ιδιοτιμής λ .

ΘΕΜΑ 3. (2M) Να περιγραφεί πλήρως η επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel για την προσέγγιση της λύσης $n \times n$ γραμμικού συστήματος $AX = B$, όπου $A = (a_{ij})$ αντιστρέψιμος και $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$. Αν

$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός 4×4 γραμμικού συστήματος, να εξη-

γήσετε γιατί, εφαρμόζοντας την μέθοδο Gauss-Seidel, οδηγούμαστε σε σύγκλιση προς την μοναδική λύση του συστήματος για οποιοδήποτε αρχικό διάνυσμα x_0 . Να δώσετε μια προσέγγιση της λύσης εφαρμόζοντας δύο επαναλήψεις της ανωτέρω μεθόδου με αρχική προσέγγιση $x_0 = (0.25, 0.5625, 0.0625, 0.40625)$.

ΘΕΜΑ 4. (2M) Υποθέτουμε ότι ένα αντικείμενο ρίπεται από ύψος 1100 ft. Μετρούμε το ύψος ανά 1 sec και έστω ότι κατά την διάρκεια των πρώτων 4 sec πήραμε τον παρακάτω πίνακα πειραματικών τιμών:

x_i	y_i
0	1100
1	1080
2	1040
3	960
4	840

. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, να προσαρμόσετε μια παραβο-

λή στα παραπάνω ζεύγη τιμών. Εκτιμήστε γιατί υποδεικνύεται η προσαρμογή παραβολής στα ανωτέρω δεδομένα.

ΘΕΜΑ 5. (2M) Να γραφεί κώδικας στην γλώσσα C με τον οποίο θα εφαρμόζεται η μέθοδος του Τραπεζίου για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$. Επίσης, να δώσετε (με αιτιολόγηση) μια εκτίμηση του σφάλματος της προσέγγισης $I \cong T_3(\sqrt{1+x^4})$.

ΑΡΙΣΤΑ = 10 ΜΟΝΑΔΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!