Τεστ 1 στην Πραγματικη Αναλυση
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης και Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
13 Μαρτιου 2010
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

Άσκηση 1. Να μελετηθεί ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια (χρησιμοποιώντας τον $\epsilon-\delta$ ορισμό) η παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x \in [0,3].$$

Λύση. Η δοθείσα συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Αναζητούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x, y \in [0,3]$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Καταρχήν, για όλα τα $x, y \in [0,3]$ έχουμε:

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{(x+1)(y+1)}.$$

Εφόσον, $x, y \in [0,3]$ έπεται ότι $x+1 \geq 1$ και $y+1 \geq 1$, άρα $\frac{1}{(x+1)(y+1)} \leq 1$. Επομένως, για όλα τα $x, y \in [0,3]$, $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$. Θέτοντας $\delta = \epsilon$, έχουμε $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ για όλα τα $x, y \in [0,3]$ με $|x-y| < \delta$. □

Άσκηση 2. Να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα που να δείχνει ότι η παρακάτω πρόταση δεν είναι εν γένει αληθής:

Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η συνάρτηση f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ποιά επιπλέον συνθήκη θα απαιτούσατε να ικανοποιεί η f ώστε να είναι η συνάρτηση f^2 ομοιόμορφα συνεχής επί του $\mathbb{R}$; **Να αποδείξετε** τον ισχυρισμό σας.

Λύση. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Στις παραδόσεις έχουμε δει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $\mathbb{R}$, ενώ η συνάρτηση $f^2(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι.

Αν απαιτήσουμε επιπλέον η συνάρτηση f να είναι φραγμένη, τότε η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $\mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Αποδεικνύουμε ότι η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $\mathbb{R}$. Έστω $\epsilon > 0$. Αναζητούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Εφόσον, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $\mathbb{R}$, για τον αριθμό $\frac{\epsilon}{3M} > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3M}$.

Ο παραπάνω αριθμός δ είναι αυτός που αναζητούμε. Πράγματι, έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$. Έχουμε:

$$|f^2(x) - f^2(y)| = |(f(x) - f(y)) \cdot (f(x) + f(y))| \leq |f(x) - f(y)| \cdot (|f(x)| + |f(y)|) \leq \frac{\epsilon}{3M} \cdot 2M = \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon.$$

Άρα, η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $\mathbb{R}$. □