Τεστ 1 στην Πραγματική Ανάλυση
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών
Διδάσκων: Ελευθέριος Ταχτσής

Άσκηση. *Να αποδειχθεί ότι οποιαδήποτε συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Λύση. Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Θα αποδείξουμε ότι για οποιεσδήποτε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $\mathbb{N}$, αν $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$.

Έστω λοιπόν δύο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $\mathbb{N}$ τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ (άρα, κάθε υπακολουθία της $(|x_n - y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 0). Εφόσον για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_n, y_n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $(|x_n - y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μη-αρνητικών ακεραίων. Αν το πεδίο τιμών, έστω A, της ακολουθίας $(|x_n - y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άπειρο σύνολο (θυμηθείτε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και σύνολο άφιξης το $\mathbb{R}$), τότε εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε μια υπακολουθία της $(|x_n - y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει στο $+\infty$ (ως υπακολουθία της $(n)_{n\in\mathbb{N}}$). Αυτό όμως αντιβαίνει στο γεγονός ότι $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$. Άρα, το A είναι πεπερασμένο σύνολο και έστω $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subseteq \{0, 1, 2, \ldots\}$. Τότε υπάρχει i, $1 \le i \le m$, τέτοιο ώστε $|x_n - y_n| = u_i$ για άπειρο πλήθος $n \in \mathbb{N}$, και συνεπώς η $(|x_n - y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο u_i. Άρα, $u_i = 0$ (διότι $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$). Πάλι από το γεγονός ότι $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$, έπεται ότι για κάθε $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ με $j \ne i$, $|x_n - y_n| = u_j$ για ένα πεπερασμένο πλήθος φυσικών αριθμών n.

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0$, $|x_n - y_n| = 0$ (ουσιαστικά, $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N} : \exists j \in \{1, 2, \ldots, m\},\ j \ne i,\ |x_n - y_n| = u_j\}$), οπότε για κάθε $n > n_0$ έχουμε ότι $x_n = y_n$. Επομένως, για κάθε $n > n_0$, $f(x_n) = f(y_n)$ και άρα, $\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$. Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $\mathbb{N}$, όπως το θέλαμε. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης "Οποιαδήποτε συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής". ■