Τεστ 2 στην Πραγματικη Αναλυση
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης και Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
20 Μαρτιου 2010
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

Άσκηση. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η εξής ακολουθία συναρτήσεων επί του $\mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{|x|}{n}, & \text{αν } |x| < n \\ 0, & \text{αν } |x| \geq n \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά επί του $\mathbb{R}$ στην συνάρτηση $f(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$, ενώ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x| < n_0$. Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$, $|x| < n$, και άρα $f_n(x) = 2 - \dfrac{|x|}{n}$ για κάθε $n \geq n_0$. Οπότε, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(2 - \dfrac{|x|}{n}) = 2 - 0 = 2$. Άρα, $f_n \to f$ επί του $\mathbb{R}$.

Τώρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = 2$. Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - f(x)| \leq 2$, διότι:

(1) Αν $|x| < n$, τότε $|f_n(x) - f(x)| = |2 - \dfrac{|x|}{n} - 2| = \dfrac{|x|}{n} < 1 < 2$,

(2) Αν $|x| \geq n$, τότε $|f_n(x) - f(x)| = |0 - 2| = 2$.

Από το (2) έπεται ότι $2 \in \{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$, άρα $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = 2$.

Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty}(\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\}) = \lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2 \neq 0$, συνεπώς η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. $\square$