Τεστ 2 στην Πραγματικη Αναλυση
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης και Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

Άσκηση 1. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων επί του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_n \rightrightarrows 0$ επί οποιουδήποτε κλειστού και φραγμένου διαστήματος $[a,b]$. Ισχύει τότε ότι $f_n \rightrightarrows 0$ επί του $\mathbb{R}$;

Λύση. Η απάντηση είναι αρνητική. Πράγματι, ας θεωρήσουμε την εξής ακολουθία συναρτήσεων: $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε είναι εύκολο να δείτε ότι $f_n \rightrightarrows 0$ επί οποιουδήποτε διαστήματος $[a,b]$, όμως $f_n \not\rightrightarrows 0$ επί του $\mathbb{R}$. ■

Άσκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ μια **ομοιόμορφα** συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε την εξής ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = f(x + \dfrac{1}{n})$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι $f_n \rightrightarrows f$ επί του $\mathbb{R}$.

Λύση. Καταρχήν παρατηρούμε ότι $f_n \to f$ επί του $\mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Εφόσον $\lim\limits_{n\to\infty}(x + \frac{1}{n}) = x$ και η f είναι συνεχής, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι $f_n \rightrightarrows f$ επί του $\mathbb{R}$ ή ισοδύναμα ότι

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in \mathbb{R})(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon). \tag{1}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $\mathbb{R}$, για το δοθέν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon). \tag{2}$$

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Τότε $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|x + \frac{1}{n} - x| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta.$$

Επομένως, από την (2) έχουμε ότι

$$|f(x + \frac{1}{n}) - f(x)| < \varepsilon$$

ή ισοδύναμα

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Συνεπώς, η (1) ισχύει και $f_n \rightrightarrows f$ επί του $\mathbb{R}$ όπως το θέλαμε. ■