Τεστ 3 στην Πραγματική Ανάλυση
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης και Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

Άσκηση 1. Να αποδειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a, b]$ όπου $-\frac{1}{2} < a < b$.

Λύση. Καταρχήν παρατηρούμε το εξής: Έστω $x \in [a, b]$. Εφόσον $x > -\frac{1}{2}$, έπεται ότι $1 + x > \frac{1}{2} > 0$. Άρα,

$$\frac{a}{a+1} \leq \frac{x}{x+1} \leq \frac{b}{b+1}. \quad \forall x \in [a, b].$$

Συνεπώς,

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| \leq L, \quad \forall x \in [a, b],$$

όπου

$$L = \max\left\{\left|\frac{a}{a+1}\right|, \left|\frac{b}{b+1}\right|\right\}.$$

Ισχύει ότι $0 < L < 1$. Από την μια μεριά, και εφόσον $a < b$, είναι προφανές ότι $L > 0$. Έστω τώρα $L = \left|\frac{c}{c+1}\right|$ όπου $c = a$ ή b. Εφόσον, $c > -\frac{1}{2}$ έπεται ότι $1 + 2c > 0$, συνεπώς $(1 + c)^2 > c^2$ και άρα $L = \left|\frac{c}{c+1}\right| < 1$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η δοθείσα σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a, b]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a, b]$ έχουμε ότι:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n\right| \leq \left|\frac{x}{x+1}\right|^n \leq L^n.$$

Επειδή η αριθμητική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} L^n$ συγκλίνει (ως γεωμετρική σειρά με λόγο $0 < L < 1$), από το M-τεστ του Weierstrass έπεται ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a, b]$ όπως το θέλαμε. Αυτό ολοκληρώνει την λύση της άσκησης. ■

Άσκηση 2. Να αποδειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(3^n x)$ ορίζει μια συνεχή συνάρτηση επί του $\mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $f_n(x) = \frac{1}{2^n} \sin(3^n x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση f_n είναι συνεχής επί του $\mathbb{R}$. Επιπλέον δε, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $\mathbb{R}$.

Πράγματι, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\left|\frac{1}{2^n}\ \sin(3^n x)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Επειδή η αριθμητική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ συγκλίνει (ως γεωμετρική σειρά με λόγο $0 < 1/2 < 1$), από το M-τεστ του Weierstrass έπεται ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\ \sin(3^n x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $\mathbb{R}$ στην συνάρτηση $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\ \sin(3^n x)$, $x \in \mathbb{R}$. Εφόσον $\forall n \in \mathbb{N}$, το n-οστό μερικό άθροισμα $S_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ είναι συνεχής συνάρτηση επί του $\mathbb{R}$ και $S_n \rightrightarrows f$ επί του $\mathbb{R}$, από την θεωρία στις ακολουθίες συναρτήσεων έπεται ότι, η συνάρτηση f είναι συνεχής επί του $\mathbb{R}$. Αυτό ολοκληρώνει την λύση της άσκησης. ■

Άσκηση 3. Να αποδειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί οποιουδήποτε διαστήματος $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (και άρα συγκλίνει σημειακά επί του $\mathbb{R}$).

Λύση. Έστω $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, και έστω $L = \max\{|a|,|b|\}$. Τότε $[a,b] \subseteq [-L,L]$. Αποδεικνύουμε ότι η δοθείσα σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[-L,L]$, οπότε θα συγκλίνει ομοιόμορφα και επί του $[a,b]$. Έστω $f_n(x) = (-1)^n\ \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-L,L]$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση f_n έχει συνεχή πρώτη παράγωγο επί του $[-L,L]$. Επίσης, για $x = 0$, η αριθμητική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \sin\left(\frac{0}{n}\right)$ συγκλίνει (στο 0). Επιπλέον, η σειρά των παραγώγων των f_n, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \frac{1}{n}\cos\left(\frac{x}{n}\right)$, συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[-L,L]$ (*αυτό έχει αποδειχθεί στις παραδόσεις του μαθήματος*). Συνεπώς, από το Θεώρημα 3 στην ενότητα "Συνέπειες ομοιόμορφης σύγκλισης σειρών συναρτήσεων", η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[-L,L]$ και άρα επί του $[a,b] \subseteq [-L,L]$. Αυτό ολοκληρώνει την λύση της άσκησης. ■