Τεστ 4 στην Πραγματικη Αναλυση
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης και Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
29 Απριλιου 2010
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

Άσκηση 1 Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συναρτήσεων επί του $[a,b]$ τέτοια ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και η f_n' είναι συνεχής επί του $[a,b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι για κάποιο $x_0\in[a,b]$, η ακολουθία αριθμών $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, και ότι η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a,b]$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά επί του $[a,b]$ σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f επί του $[a,b]$ τέτοια ώστε $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$.

(β) Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a,b]$ στην f.

Λύση. (α) Εφόσον η f_n' είναι συνεχής επί του $[a,b]$, μπορούμε να γράψουμε

$$f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt,\ x\in[a,b]. \tag{1}$$

Έστω $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=K$ και έστω $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ για όλα τα $x\in[a,b]$. Εφόσον η (f_n') συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a,b]$ στην συνάρτηση g, από την θεωρία έπεται ότι

$$\forall x\in[a,b],\ \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt=\int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$

Άρα, για κάθε $x\in[a,b]$, το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει και $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=K+\int_{x_0}^{x} g(t)dt$. Επομένως, η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει σημειακά επί του $[a,b]$ στην συνάρτηση

$$f(x)=K+\int_{x_0}^{x} g(t)dt,\ x\in[a,b]. \tag{2}$$

Εφόσον η συνάρτηση g είναι συνεχής επί του $[a,b]$ (διότι η (f_n') είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων επί του $[a,b]$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση g), έπεται ότι η συνάρτηση $G(x)=\int_{x_0}^{x} g(t)dt,\ x\in[a,b]$, είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Άρα, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $f'(x)=g(x)$ για όλα τα $x\in[a,b]$.

Ο τελευταίος ισχυρισμός του (α) είναι προφανής λόγω της παραπάνω απόδειξης.

(β) Λόγω του (α), εδώ έχουμε όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος (στην ενότητα ''Ομοιόμορφη σύγκλιση και παραγώγιση'') που κάναμε στο μάθημα, επομένως μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την απόδειξη που δώσαμε στο μάθημα για να επιβεβαιώσει ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Ένας άλλος (και συντομότερος) τρόπος είναι ο εξής:

Από τις σχέσεις (1) και (2) παραπάνω, έχουμε:

$$\begin{aligned} |f(x)-f_n(x)| &\le |K-f_n(x_0)|+|\int_{x_0}^{x}|g(t)-f_n'(t)|dt| \\ &\le |K-f_n(x_0)|+|x-x_0|\cdot\sup\{|g(t)-f_n'(t)|: t\in[a,b]\} \end{aligned}$$

Άρα,

$$\sup\{|f(x)-f_n(x)| : x\in[a,b]\} \le |K-f_n(x_0)| + (b-a)\cdot\sup\{|g(x)-f_n'(x)| : x\in[a,b]\}.$$

Καθώς $n\to\infty$, το δεξί μέλος της τελευταίας ανισότητας συγκλίνει στο 0, άρα

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{|f(x)-f_n(x)| : x\in[a,b]\}=0$$

και η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f όπως το θέλαμε. □

Άσκηση 2 Διατυπώστε και αποδείξτε ένα ανάλογο αποτέλεσμα προς την άσκηση 1 για σειρές συναρτήσεων.

Λύση. ''Εστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συναρτήσεων επί του $[a,b]$ τέτοια ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και η f_n' είναι συνεχής επί του $[a,b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι για κάποιο $x_0\in[a,b]$, η αριθμητική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ συγκλίνει, και ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a,b]$. Τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a,b]$ σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f επί του $[a,b]$ και $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$.''

Θεωρώντας τις ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των σειρών συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$, η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος έπεται από την λύση της άσκησης 1. □

Άσκηση 3 Να αποδείξετε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\cos(\frac{x}{n})$ συγκλίνει σημειακά επί του $\mathbb{R}$ και ομοιόμορφα επί οποιουδήποτε διαστήματος $[a,b]$.

Λύση. Για $x=0$, έχουμε την αριθμητική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

η οποία συγκλίνει χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Leibniz. Επίσης, η σειρά των παραγώγων $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\sin(\frac{x}{n})$ είναι μια σειρά συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $\mathbb{R}$ (απλή εφαρμογή του κριτηρίου Weierstraß). Άρα, από την άσκηση 2, η δοθείσα σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα επί οποιουδήποτε διαστήματος $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, και άρα σημειακά επί του $\mathbb{R}$, σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\sin(\frac{x}{n})$, για όλα τα $x\in\mathbb{R}$. □