

ΤΕΣΤ 4 ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ-ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
29 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2010
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

Άσκηση 1 Έστω $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία συναρτήσεων επί του $[a, b]$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και η f'_n είναι συνεχής επί του $[a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι για κάποιο $x_0 \in [a, b]$, η ακολουθία αριθμών $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει, και ότι η ακολουθία συναρτήσεων $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a, b]$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά επί του $[a, b]$ σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f επί του $[a, b]$.
- (β) Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a, b]$ στην f .

Άσκηση 2 Διατυπώστε και αποδείξτε ένα ανάλογο αποτέλεσμα προς την άσκηση 1 για σειρές συναρτήσεων.

Άσκηση 3 Να αποδείξετε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \cos\left(\frac{x}{n}\right)$ συγκλίνει σημειακά επί του $\mathbb{R}$ και ομοιόμορφα επί οποιουδήποτε διαστήματος $[a, b]$.

Παρατηρήσεις

1. Στα πλαίσια του κουίζ, να γίνει **μόνο** η άσκηση 1(α).
2. Οι ασκήσεις (1β), 2, και 3, είναι αυτό που λένε στις Η.Π.Α. “take home exam” και θα πρέπει να παραδοθούν λυμένες την επόμενη Τετάρτη 5/5 στο μάθημα.

ΕΧΕΤΕ 15 ΛΕΠΤΑ ΣΤΗΝ ΔΙΑΘΕΣΗ ΣΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ 1(α).
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ