

ΤΕΣΤ 5 ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ  
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ-ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
06/05/2010  
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

**Άσκηση.** (α) Να βρεθεί το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\frac{1}{2} + \frac{2x}{4} + \frac{3x^2}{8} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{2^n} + \cdots$$

στο σύνολο σύγκλισής της, το οποίο να βρείτε.

(β) Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς  $\sum_{n=0}^{\infty} (3x-2)^n$ .

**Λύση.** (α) Η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$  έχει ακτίνα σύγκλισης  $R = 2$  και

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot x^n = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}$$

για όλα τα  $x$  με  $|x| < 2$ . Από το θεώρημα παραγωγίσης δυναμοσειρών όρο προς όρο έπεται ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot x^{n-1} &= \frac{1}{2} + \frac{2x}{4} + \frac{3x^2}{8} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{2^n} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{x}{2})^2} \end{aligned}$$

για  $|x| < 2$ . Για  $x = 2$  έχουμε την σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} n/2$  η οποία δεν συγκλίνει, και για  $x = -2$ , έχουμε την σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2}$ , η οποία επίσης δεν συγκλίνει. Άρα, το σύνολο της σύγκλισης συμπίπτει με το διάστημα της σύγκλισης  $(-2, 2)$ .  $\square$

(β)  $\sum_{n=0}^{\infty} (3x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x - \frac{2}{3})^n$ . Η ακτίνα σύγκλισης είναι  $1/3$ , οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι  $(\frac{1}{3}, 1)$ . Για  $x = 1/3$ , έχουμε την σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  η οποία δεν συγκλίνει, και για  $x = 1$ , έχουμε την σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = +\infty$ . Άρα, το σύνολο σύγκλισης είναι το  $(\frac{1}{3}, 1)$ .  $\square$