Τεστ 6 στην Πραγματικη Αναλυση
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης και Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
13/05/2010
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

(1) Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3^n+5^n)\cdot x^{2n}.$$

Λύση. Έχουμε: $a_n = \begin{cases} 3^k+5^k & \text{αν } n=2k \\ 0 & \text{αν } n=2k+1 \end{cases}$

Επομένως, $\sqrt[2k+1]{a_{2k+1}} \to 0$ καθώς $k\to\infty$. Επίσης,

$$\sqrt{5} = \sqrt[2k]{5^k} \leq \sqrt[2k]{3^k+5^k} \leq \sqrt[2k]{5^k+5^k} = \sqrt[2k]{2}\sqrt{5}.$$

Εφόσον $\sqrt[2k]{2}\sqrt{5} \to 1\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5}$ καθώς $k\to\infty$, έπεται ότι $\sqrt[2k]{3^k+5^k} \to \sqrt{5}$. Άρα, $\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|} = \sup\{0,\sqrt{5}\} = \sqrt{5}$, και συνεπώς $R = 1/\sqrt{5}$.

Δεύτερος τρόπος: Θέτουμε $y = x^2$. Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(3^n+5^n)\cdot y^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R^* = 1/5$ ($5 = \sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{3^n+5^n} \leq \sqrt[n]{2\cdot 5^n} \to 5$). Επειδή $|y| < 1/5$ ανν $x^2 < 1/5$ ανν $|x| < 1/\sqrt{5}$ έπεται (από το θεώρημα $\mathrm{Cauchy-Hadamard}$) ότι η ακτίνα σύγκλισης της δοθείσας δυναμοσειράς είναι $R = 1/\sqrt{5}$.

Για $x = -1/\sqrt{5}$, έχουμε την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(3^n+5^n)\cdot\frac{1}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty}((\frac{3}{5})^n+1)$ η οποία αποκλίνει αφού $\lim_{n\to\infty}((\frac{3}{5})^n+1) = 1 \neq 0$. Ομοίως, για $x = 1/\sqrt{5}$ η προκύπτουσα σειρά αποκλίνει. Άρα, το σύνολο σύγκλισης είναι το $(-1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. □

(2) Έστω

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n,\ |x-x_0| < R,$$

και έστω $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία τέτοια ώστε

(α′) $f(t_n) = 0$ για όλα τα $n\in\mathbb{N}$.
(β′) $\lim_{n\to\infty} t_n = x_0$.

Να αποδείξετε ότι $a_0 = 0$.

Λύση. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα σύγκλισης (x_0-R, x_0+R). Εφόσον, $\lim_{n\to\infty} t_n = x_0$, από την συνέχεια της f έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(x_0)$. Όμως, $f(t_n) = 0$ για όλα τα $n\in\mathbb{N}$, επομένως $f(x_0) = 0$. Από την άλλη μεριά, $f(x_0) = a_0$, άρα $a_0 = 0$, όπως το θέλαμε. □