ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
(ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ)

Πανεπιστημιο Αιγαιου, Τμημα Στατ. και Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων

23 Ιουνιου 2011

Διαρκεια εξετασης: 3 ωρες (12.00-15.00)

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. Σωστό ή λάθος;

α) Η συνάρτηση $f(x) = \sin(\sin x)$, $x \geq 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) Αν η g είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $[m, m+1]$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, τότε η g είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $\mathbb{R}$.

γ) Υπάρχει ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι φραγμένη.

Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Λύση. α) Στο μάθημα έχουμε δει ότι η συνάρτηση $x \mapsto \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως, η δοθείσα συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $[0, +\infty)$ ως σύνθεση δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων. Για μια απόδειξη του τελευταίου αποτελέσματος, δείτε τις σημειώσεις του μαθήματος ή τις λύσεις της προόδου στις 20/05/11 (http://www.actuar.aegean.gr/Dep/Yliko pragmatikis.html). Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η πρόταση στο α) είναι αληθής.

β) Η πρόταση είναι ψευδής. Θεωρείστε την συνάρτηση $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $[m, m+1]$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ (Θεώρημα Heine) ενώ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $\mathbb{R}$ (βλ. σημειώσεις μαθήματος). $\square$

γ) Η πρόταση είναι αληθής. Θεωρείστε την συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2. Να μελετηθεί ως προς την σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση η εξής ακολουθία συναρτήσεων:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x^2 - 2nx & \text{αν } x \in [0, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{αν } x \in [\frac{2}{n}, 2]. \end{cases}$$

Λύση. *Σημειακή σύγκλιση*: Έστω $x \in [0, 2]$. Αν $x = 0$, τότε $f_n(0) = 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.

Έστω $x \in (0, 2]$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{2}{n_0} \leq x$. Συνεπώς, για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$, $x \in [\frac{2}{n}, 2]$ και άρα για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$, $f_n(x) = 0$. Επομένως, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $f_n \to f$, όπου $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε:

$$A_n = \{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 2]\} = \{|f_n(x)| : x \in [0, 2]\}.$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε $A_n = \{2nx - n^2x^2 : x \in [0, 2/n]\}$. ($n^2x^2 - 2nx \leq 0$ για κάθε $x \in [0, 2/n]$ και $f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in [2/n, 2]$). Η συνάρτηση $h(x) = 2nx - n^2x^2$, $x \in [0, 2/n]$, λαμβάνει (ολικό) μέγιστο στο $1/n$ την τιμή $h(1/n) = 1$. Συνεπώς, $\sup(A_n) = 1$. Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty}(\sup(A_n)) = 1 \neq 0$. Επομένως, η ακολουθία (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 2]$. $\square$

ΘΕΜΑ 3. α) Να δοθεί ο ορισμός της έννοιας "σειρά συναρτήσεων".

β) Να αποδειχθεί ότι η $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1 - x)x^n$ συγκλίνει σημειακά ενώ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[0, 1]$.

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Λύση. α) Βλέπε σημειώσεις μαθήματος.

β) Έστω (S_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της δοθείσης σειράς. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0,1]$,

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (1-x)x^i = (1-x)(1+x+\cdots+x^n) = 1 - x^{n+1}.$$

Επομένως, $S_n \to S$, όπου

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in [0,1), \\ 0 & \text{αν } x = 1. \end{cases}$$

Επειδή η S_n είναι συνεχής επί του $[0,1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ενώ η S είναι ασυνεχής, έπεται ότι η δοθείσα σειρά συναρτήσεων δεν συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[0,1]$.

(Ως άσκηση, εξετάστε την $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ ως προς την σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[0,1]$).

γ) Καταρχήν παρατηρούμε ότι η δοθείσα f είναι καλά ορισμένη διότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (και μάλιστα η σύγκλιση επί του $\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφη). Για το ζητούμενο της άσκησης, αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη επί οποιουδήποτε διαστήματος $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Έστω λοιπόν $a,b \in \mathbb{R}$ με $a<b$. Έστω $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $f_n'(x) = \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$. Επίσης, η $\sum f_n$ συγκλίνει (ομοιόμορφα) επί του $[a,b]$ και η $\sum f_n'$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a,b]$. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε ότι

$$\left| \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2} \right| \leq \frac{2\max\{|a|,|b|\}}{(n^2+x^2)^2} \leq \frac{2\max\{|a|,|b|\}}{n^4}.$$

Επειδή η αριθμητική σειρά $\sum \frac{2\max\{|a|,|b|\}}{n^4}$ συγκλίνει, από το M-τεστ έχουμε ότι η $\sum f_n'$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a,b]$.

Από το θεώρημα "Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συναρτήσεων επί του $[a,b]$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και η f_n' είναι συνεχής επί του $[a,b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι για κάποιο $x_0 \in [a,b]$, η αριθμητική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ συγκλίνει, και ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a,b]$. Τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a,b]$ σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f επί του $[a,b]$ και $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$." (βλ. σημειώσεις μαθήματος) έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη επί του $[a,b]$ και εφόσον το $[a,b]$ ήταν τυχαίο, η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

ΘΕΜΑ 4. α) Να διατυπωθεί το θεώρημα Cauchy-Hadamard. Γιατί το θεώρημα δεν δίνει πληροφορίες για δύο συγκεκριμένα σημεία της ευθείας των πραγματικών αριθμών; *Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας κατάλληλα παραδείγματα.*

β) Να αποδείξετε ότι: $-\ln(1-x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ για όλα τα $x \in (-1,1)$.

Λύση. α) Βλ. σημειώσεις μαθήματος.

β) Θεωρείστε την $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1,1)$, και εφαρμόσατε ολοκλήρωση όρο προς όρο, όπως κάναμε στο μάθημα για την $\ln(1+x)$. □

ΘΕΜΑ 5. α) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x \in [-1,0], \\ 1 & \text{αν } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν $f \in \mathrm{RS}_f[-1,1]$, $f \in \mathrm{RS}_{f^2}[-1,1]$, $f^2 \in \mathrm{RS}_f[-1,1]$. Σε περίπτωση όπου η εξεταζόμενη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, να υπολογιστεί το αντίστοιχο ολοκλήρωμα.

β) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{αν } x \in (0,2/\pi]. \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν $f \in BV[0,2/\pi]$.

Λύση. α) Στο μάθημα έχουμε δει μια πληθώρα τέτοιων παραδειγμάτων. Γι' αυτό δίνουμε μόνο ένα σκετς της λύσης.

$f \notin \mathrm{RS}_f[-1,1]$: Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση P του $[-1,1]$, $U(f,P,f) - L(f,P,f) \geq \varepsilon$. Έστω $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_0 = -1$, $x_n = 1$, $x_0 < \ldots < x_n$, μια τυχαία διαμέριση του $[-1,1]$. Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

(*i*) $0 \in P$. Τότε $0 = x_k$ για κάποιο k, $0 < k < n$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} L(f,P,f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta f_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta f_i\right) + m_{k+1} \cdot \Delta f_{k+1} + \left(\sum_{i=k+2}^{n} m_i \cdot \Delta f_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} (-1) \cdot (-1 - (-1))\right) + (-1)(1 - (-1)) + \left(\sum_{i=k+2}^{n} 1 \cdot (1-1)\right) \\ &= -2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} U(f,P,f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta f_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \Delta f_i\right) + M_{k+1} \cdot \Delta f_{k+1} + \left(\sum_{i=k+2}^{n} M_i \cdot \Delta f_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} (-1) \cdot (-1 - (-1))\right) + 1 \cdot (1 - (-1)) + \left(\sum_{i=k+2}^{n} 1 \cdot (1-1)\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Άρα, $U(f,P,f) - L(f,P,f) = 4$.

(*ii*) $0 \notin P$. Παρόμοια με την περίπτωση (i) αποδεικνύεται ότι $L(f,P,f) = -2$ και $U(f,P,f) = 2$, συνεπώς, $U(f,P,f) - L(f,P,f) = 4$.

Από τα παραπάνω και για $\varepsilon = 3$ έχουμε ότι $U(f,P,f) - L(f,P,f) > \varepsilon$, οπότε $f \notin \mathrm{RS}_f[-1,1]$.

$f \in \mathrm{RS}_{f^2}[-1,1]$: Έχουμε ότι $f^2(x) = 1\ \forall x \in [-1,1]$, συνεπώς $f \in \mathrm{RS}_{f^2}[-1,1]$ και $\int_{-1}^{1} f df^2 = 0$ (Βλ. παράδειγμα στις σημειώσεις για RS ολοκλήρωμα φραγμένης συνάρτησης ως προς σταθερή συνάρτηση).

$f^2 \in \mathrm{RS}_f[-1,1]$: Η f^2 είναι σταθερή στο $[-1,1]$ και η f είναι αύξουσα στο $[-1,1]$, συνεπώς $f^2 \in \mathrm{RS}_f[-1,1]$ (Βλ. σημειώσεις) και $\int_{-1}^{1} f^2 df = 1 \cdot (f(1) - f(-1)) = 2$.

β) Η f είναι συνεχής στο $[0, 2/\pi]$. Επίσης, η f έχει φραγμένη παράγωγο στο $(0, 2/\pi)$. Πράγματι, για κάθε $x \in (0, 2/\pi)$ έχουμε ότι:

$$|f'(x)| = \left|2x \sin \frac{1}{x} + \left(\frac{-1}{x^2}\right) x^2 \cos \frac{1}{x}\right| \leq 2|x| + 1 < \frac{4+\pi}{\pi}.$$

Από την θεωρία στις συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης έπεται ότι $f \in BV[0, 2/\pi]$. $\square$