ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πανεπιστημιο Αιγαιου, Τμημα Στατ. & Αναλ.-Χρηματ. Μαθηματικων

1 Ιουνιου 2012

Διαρκεια εξετασης: 3 ωρες (18.00-21.00)

Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. α) **[0.5 Μον.]** Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x) = e^{1/x}$ και $g(x) = e^{-1/x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς επί του $(0, 1)$.

β) **[0.5 Μον.]** Να βρεθεί φραγμένη και συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

γ) **[1 Μον.]** Να αποδειχθεί ότι αν η $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ είναι αριθμός, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $[a, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2. [1 Μον.] Να μελετηθεί ως προς την σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{n^2 \ln x}{x^n}$, $x \in [1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

ΘΕΜΑ 3. [1 Μον.] Να μελετηθεί ως προς την σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση επί του $[0, 1]$ η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (1 - x)$.

ΘΕΜΑ 4. α) **[1 Μον.]** Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{2^n} (x - 1)^n.$$

β) **[1 Μον.]** Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < R$, όπου R η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, και έστω $g(x) = f(x^k)$, όπου k είναι ένας (σταθερός) θετικός ακέραιος. Να αποδειχθεί ότι $g^{(m)}(0) = 0$ αν $m \neq kn$ και $g^{(kn)}(0) = \dfrac{(kn)!}{n!} f^{(n)}(0)$, $n \geq 0$.

ΘΕΜΑ 5. α) **[1 Μον.]** Δίνεται συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι αύξουσα, **αν και μόνο αν**, $V_a^b f = f(b) - f(a)$.

β) **[1 Μον.]** Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f(x) = \sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$, και $g(x) = |\ln x|$, $x \in [1/e, 2e]$, είναι φραγμένης κύμανσης και να υπολογιστούν οι αντίστοιχες ολικές κυμάνσεις. Επίσης, να γραφεί η συνάρτηση g ως διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων επί του $[1/e, 2e]$.

ΘΕΜΑ 6. α) **[1 Μον.]** Έστω $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{αν } x \in [1, 2]. \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{αν } x \in (1, 2]. \end{cases}$ Να εξεταστεί αν $f \in \mathrm{RS}_f[0, 2]$ και αν $f \in \mathrm{RS}_g[0, 2]$. Σε όποια περίπτωση η f είναι ολοκληρώσιμη, να υπολογιστεί το αντίστοιχο ολοκλήρωμα.

β) **[1 Μον.]** Να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) τα ολοκληρώματα $\int_0^2 x^2 d([x^2])$ και $\int_0^{\pi/2} x d(\sin^3 x)$.

ΑΡΙΣΤΑ = 10 ΜΟΝΑΔΕΣ.
ΓΙΑ ΤΗΝ ΒΑΣΗ (= 5 ΜΟΝΑΔΕΣ), ΠΡΕΠΕΙ ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΕΝΑ ΕΡΩΤΗΜΑ ΑΠΟ ΤΟ ΘΕΜΑ 5 ΚΑΙ ΣΕ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΟ ΘΕΜΑ 6!
ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ.