ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πανεπιστημιο Αιγαιου, Τμημα Στατ. & Αναλ.-Χρηματ. Μαθηματικων

14 Ιουνιου 2013

Διαρκεια εξετασης: 3 ωρες (09.00-12.00)

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{1}{5n+1} \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής επί του A. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\left(f\left(\dfrac{1}{5n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

β) Έστω $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{x + (1-x)\cos(x^2)}{1-x}$. Να εξετάσετε αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ 2. α) Να επιλέξετε **μόνο ένα** εκ των (α1), (α2):

α1) Έστω (f_n) μια ακολουθία συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην f επί του A και ικανοποιεί $|f_n(x)| \leq M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και όλα τα $x \in A$. Αν η g είναι συνεχής επί του $[-M, M]$, να αποδείξετε ότι η ακολουθία $(g \circ f_n)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $g \circ f$ επί του A.

α2) Έστω ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f επί του A, και έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι φραγμένη επί του A. Να αποδείξετε ότι η f είναι φραγμένη επί του A και ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

β) Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Να μελετηθεί η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως προς τη σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση καθώς επίσης και η σύγκλιση της ακολουθίας $(\int_0^1 f_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$.

ΘΕΜΑ 3. Να μελετηθούν οι παρακάτω σειρές συναρτήσεων ως προς την σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση επί του $\mathbb{R}$: (α) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}(x^2 + n)$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{1 + n^5x^2}$, (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

ΘΕΜΑ 4. α) Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2x}{4} + \dfrac{3x^2}{8} + \cdots + \dfrac{nx^{n-1}}{2^n} + \cdots$, καθώς επίσης και το άθροισμα της δυναμοσειράς στο σύνολο σύγκλισής της.

β) Έστω $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ για κάθε x στο διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Έστω $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία τέτοια ώστε $f(t_n) = 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x_0$. Να αποδείξετε ότι $a_0 = 0$.

γ) Να εξηγήσετε γιατί στον ορισμό της ακτίνας σύγκλισης R μιας δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ χρησιμοποιούμε $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ και όχι $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

ΘΕΜΑ 5. α) Να δώσετε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για καθένα από τα παρακάτω:

α1) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz επί του $[a, b]$ και έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $g'(x) < 0 \ \forall x \in [a, b]$. Τότε $f \in RS_g[a, b]$.

α2) $f^3 \in RS_g[a, b] \Leftrightarrow f \in RS_g[a, b]$.

α3) $f^2 \in RS_g[a, b] \Leftrightarrow f \in RS_g[a, b]$.

β) Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ολοκληρώματα $\int_a^b f dg$, όπου a, b, f, g όπως παρακάτω:

β1) $f(x) = x + \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$, και $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in [0, \pi], \\ x - 2\pi & \text{αν } x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$

β2) $\int_{-2}^{2} x \, d(-7\text{Arctan}x - 3u_0(x))$.

Βαθμος καθε θεματος = 2

ΑΡΙΣΤΑ = 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ