Προαιρετικη Προοδος στην Πραγματικη Αναλυση
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης και Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
20 Μαιου 2011
Διαρκεια εξετασης: 2 ωρες
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. 1) Να εξεταστεί η συνάρτηση $f(x) = \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια.

2) Ισχύει ότι το γινόμενο δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση; Το ίδιο ερώτημα για την σύνθεση δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων. Αν η απάντηση είναι καταφατική αποδείξτε τον ισχυρισμό. Αν είναι αρνητική, τότε να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Λύση. 1) Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \sqrt{2\pi n}$, $y_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσετε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, ενώ $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$. Άρα, η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $\mathbb{R}$.

2) Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι αρνητική. Πράγματι, έστω $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $\mathbb{R}$, ενώ η $f^2(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι, όπως γνωρίζουμε από τις παραδόσεις του μαθήματος.

Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα είναι θετική. Πράγματι, έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ δύο ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Θα αποδείξουμε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του A. Προς τούτο, έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της g επί του B, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(\forall x, y \in B)\ (|x - y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon). \tag{1}$$

Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f επί του A, για τον θετικό αριθμό δ, υπάρχει $\delta' > 0$ τέτοιο ώστε

$$(\forall x, y \in A)\ (|x - y| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta). \tag{2}$$

Ο αριθμός δ' είναι αυτός που αναζητούμε. Πράγματι, έστω $x, y \in A$ τέτοια ώστε $|x - y| < \delta'$. Από την (2) έχουμε ότι $|f(x) - f(y)| < \delta$ και (εφόσον $f(x), f(y) \in B$) από την (1), $|g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$. Άρα, η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του A.

ΘΕΜΑ 2. 1) Να δώσετε τους ορισμούς των εξής εννοιών: (α) ακολουθίας συναρτήσεων επί ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, (β) της σημειακής και ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων και να επισημάνετε την διαφορά των δύο εννοιών.

2) Έστω η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} -x - \dfrac{1}{2n} & \text{αν } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ \dfrac{n}{2}x^2 & \text{αν } x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ x - \dfrac{1}{2n} & \text{αν } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι (f_n) είναι μια ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[-1, 1]$ στην $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$.

Λύση. 1) Βλ. παραδόσεις μαθήματος.

2) Για την σημειακή σύγκλιση: Έστω $x \in [-1,1]$. Αν $x = 0$, τότε $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$, συνεπώς $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ $(= |0|)$.

Έστω $x > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n_0 < x$, συνεπώς για κάθε $n \geq n_0$, $1/n < x$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$, $x \in [1/n, 1]$, οπότε $f_n(x) = x - \frac{1}{2n}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x = |x|$.

Έστω $x < 0$. Τότε $-x > 0$ και εργαζόμενοι για το $-x$ όπως παραπάνω, προκύπτει ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$, $f_n(x) = -x - \frac{1}{2n}$. Άρα, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -x = |x|$, εφόσον $x < 0$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $f_n \to f$ επί του $[-1,1]$ όπως το θέλαμε.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f επί του $[-1,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω $A_n = \{|f_n(x) - |x|| : x \in [-1,1]\}$. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο A_n είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό $3/2n$. Έστω $x \in [-1,1]$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $x \in [-1, -1/n]$. Τότε $|f_n(x) - |x|| = |-x - 1/2n - (-x)| = 1/2n \leq 3/2n$.
2. $x \in (-1/n, 1/n)$. Τότε $|f_n(x) - |x|| = |nx^2/2 - |x|| \leq nx^2/2 + |x| < \frac{n}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} = 3/2n$.
3. $x \in [1/n, 1]$. Τότε $|f_n(x) - |x|| = |x - 1/2n - x| = 1/2n \leq 3/2n$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq a_n := \sup(A_n) \leq 3/2n.$$

Εφόσον $\lim_{n\to\infty} 3/2n = 0$, έχουμε επίσης ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, οπότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f επί του $[-1,1]$.

ΘΕΜΑ 3. 1) Να αποδειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί οποιουδήποτε διαστήματος $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

2) Να μελετηθεί ως προς την σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n, \quad x \geq -\frac{1}{4}.$$

Λύση. 1) Βλ. ιστοσελίδα του μαθήματος, λύσεις Τεστ 3 (2011).

2) Η δοθείσα σειρά συγλίνει ομοιόμορφα επί του $[-1/4, +\infty)$ διότι: Για κάθε $x \geq -1/4$ έχουμε ότι $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η τελευταία ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x > -1/2$. Συνεπώς, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq -1/4$, $\frac{1}{n^{3/2}}\left|\left(\frac{x}{x+1}\right)^n\right| < \frac{1}{n^{3/2}}$ και εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει, το συμπέρασμα έπεται από το M-τεστ του Weierstrass.

ΘΕΜΑ 4. Για κάθε $p \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το **σύνολο σύγκλισης** της δυναμοσειράς $\sum \frac{(-1)^n}{4^n n^p} x^{2n}$.

Λύση. Θέτουμε $y = x^2$. Τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum \frac{(-1)^n}{4^n n^p} y^n$ είναι 4 και επομένως η ακτίνα σύγκλισης της αρχικής δυναμοσειράς είναι 2.

1. $x=-2$. Τότε έχουμε την αριθμητική σειρά $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$.

   (α′) $p>1$. Τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα άρα και απλά.

   (β′) $p \in (0,1]$. Τότε η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη (δηλ. συγκλίνει ενώ δεν συγκλίνει απόλυτα).

   (γ′) $p \leq 0$. Τότε η σειρά δεν συγκλίνει.

2. $x=2$. Όπως παραπάνω.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι για $p>0$, το σύνολο σύγκλισης είναι το κλειστό διάστημα $[-2,2]$, ενώ για $p \leq 0$, το σύνολο σύγκλισης είναι το ανοικτό διάστημα $(-2,2)$.

Τα θεματα ειναι ισοδυναμα.
Καλη Επιτυχια.