

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ, ΤΜΗΜΑ ΣΑΧΜ

15 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ (15:00-18.00)

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ Χ. ΤΑΧΤΗΣ

ΘΕΜΑ 1. α) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Να δώσετε τους εξής ορισμούς: (i) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, (ii) Η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz. Στην συνέχεια, να δώσετε όλες τις δυνατές σχέσεις μεταξύ συνέχειας, ομοιόμορφης συνέχειας και Lipschitz. Ποιές οι δυνατές σχέσεις, αν $A = [a, b]$;

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = e^{-1/x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 2. Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $f_n(x) = 4 - \frac{|x|}{n}$ αν $|x| < n$ και $f_n(x) = 0$ διαφορετικά. Να εξεταστεί η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ως προς τη σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση επί του $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3. Σωστό ή λάθος; **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας!**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^2 \left(\frac{\sqrt[n]{x}}{1+x} \right)^n dx \neq \int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{x}}{1+x} \right)^n dx.$$

ΘΕΜΑ 4. α) Να αποδειχθεί ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$ και ότι το άθροισμά της, έστω f , ικανοποιεί την εξίσωση $f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθούν όλα τα σημεία $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1))^{-1} x^n$ δεν συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 5. α) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{αν } x \in (0, 2/\pi]. \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν $f \in BV[0, 2/\pi]$.

β) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\int_0^2 x^2 d([x^2])$, $\int_0^{10} \text{Arc tan } x d(x^3)$. Αν υπάρχουν, να τα υπολογίσετε.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.