

**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ, ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤ. & ΑΝΑΛ.-ΧΡΗΜΑΤ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
25 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012  
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ (18.00-21.00)  
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ Χ. ΤΑΧΤΗΣ

**ΘΕΜΑ 1.** α) [1M] Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f(x) = x \cdot \sin(x)$  είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του  $\mathbb{R}$ . Εν συνεχεία, να διατυπώσετε παρατηρήσεις και συμπεράσματα που προκύπτουν από το αποτέλεσμα σας.

β) [1M] Έστω  $f$  μια συνάρτηση τέτοια ώστε η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$ , υπάρχει, και είναι συνεχής επί του πεδίου ορισμού της. Αν η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής (επί του πεδίου ορισμού της), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η  $f^{-1}$  είναι επίσης ομοιόμορφα συνεχής; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**ΘΕΜΑ 2.** [2M] Έστω  $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(i) Δείξτε ότι η  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει σημειακά επί του  $\mathbb{R}$ .

(ii) Αν  $a > 0$ , συγκλίνει η  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ομοιόμορφα επί του  $[a, +\infty)$ ; Αν  $a = 0$ ;

**ΘΕΜΑ 3.** [2M] Να αποδειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ :

(i) Συγκλίνει ομοιόμορφα επί οποιουδήποτε διαστήματος  $[a, b]$ ,  $a < b$ .

(ii) Δεν συγκλίνει απόλυτα για καμία τιμή του  $x$ .

**ΘΕΜΑ 4.** [2M] α) Να βρεθεί μια αναπάρασταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{(1 + 2x)^2}$$

σε δυναμοσειρά σε κατάλληλο διάστημα  $(a, b)$ .

β) Έστω  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης  $R$  και έστω  $[a, b] \subseteq (-R, R)$ . Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $x \in [a, b]$ , είναι ομοιόμορφα συνεχής. Να αποδείξετε κάθε ισχυρισμό σας.

**ΘΕΜΑ 5.** [2M] α) Έστω  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ ,  $x \in [-2, 2]$ . Να βρεθούν (αν υπάρχουν) δύο αύξουσες συναρτήσεις  $g, h : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιες ώστε  $f(x) = (g - h)(x)$ ,  $\forall x \in [-2, 2]$ . Επίσης, να εξετάσετε αν υπάρχει το ολοκλήρωμα  $\int_{-2}^2 f df$ , και αν υπάρχει, να το υπολογίσετε.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει το ολοκλήρωμα  $\int_1^5 \ln(\sqrt{1 + x^2}) d(x^2)$ , και αν υπάρχει, να το υπολογίσετε.

**ΑΡΙΣΤΑ = ΔΕΚΑ (10) ΜΟΝΑΔΕΣ.**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.**