

ΣΥΝΕΧΕΙΑ Ι

[ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ]

#1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς με χρήση του ε - δ ορισμού.

(α) $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \geq 1$ (Να μην χρησιμοποιηθεί η ανίσωση $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$)

(β) $f_2(x) = \frac{x}{x+2}$, $|x| \leq 1$,

(γ) $f_3(x) = x^2$, $x \in (-10^{10}, 10^{15}]$,

(δ) $f_4(x) = 7x + 6 \sin x$, $x \in \mathbb{R}$,

(ε) $f_5(x) = x - 3x^2$, $x \in (-5, 3)$.

#2. Με βάση τον ε - δ ορισμό, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

#3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς (με χρήση ακολουθιών)

(α) $f_1(x) = \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$

(β) $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in (0, 1)$,

(γ) $f_3(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in [0, 1)$,

(δ) $f_4(x) = x + \ln x$, $x > 0$

(ε) $f_5(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$.

#4. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

(α) $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a, +\infty)$, $a > 0$.

(β) $f_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(γ) $f_3(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(δ) $f_4(x) = \frac{x}{1-x}$, $x < 0$.

(ε) $f_5(x) = x^4$, $x \in (-3, 2)$.

{ Υπόδειξη: Να δείξετε ότι οι παραπάνω συναρτήσεις ικανοποιούν την συνθήκη του Lipschitz. Επίσης, για τις (β) και (γ) να χρειαστεί η ανισότητα $\frac{\alpha+\beta}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} \leq 2$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
στην οποία και να αποδείξετε }.

75. Να γράψετε μια διαφορετική απόδειξη από αυτήν που έγινε στο μάθημα για το ότι η $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

{ Υπόδειξη: ΒΗΜΑ 1. Η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 2]$.

ΒΗΜΑ 2 Η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$.

ΒΗΜΑ 3. Δείξτε ότι:

$$\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, y \in [0, +\infty)) (|x-y| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon)$$

{ Να θεωρήσετε $\delta = \min \{1, \delta_1, \delta_2\}$ όπου δ_1, δ_2 προκύπτουν από τα βήματα 1 και 2. }.

και φραγμένη στο $(0,1]$ αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1]$.

(ii) Το ίδιο ερώτημα για το διάστημα $[0,+\infty)$

#7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ δύο ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις στο A . Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

#8. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα φραγμένο σύνολο και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο A . Να αποδείξετε ότι η f είναι φραγμένη στο A .

{Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα με τις Cauchy ακολουθίες}

#9. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \tan x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

#10. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο A τέτοια ώστε $|f(x)| \geq K > 0$, για όλα τα $x \in A$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A .

#11. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια συνάρτηση $g_\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{R}$ τ.ω. η g_ε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ για όλα τα $x \in A$. Να αποδείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A .

#12. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$, ενώ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$. Επίσης, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

να εστιάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς επί των πεδίων ορισμού τους :

$$f_1(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_2(x) = \ln x, \quad x > 0$$

$$f_3(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \geq 1.$$

$$f_4(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x > 1.$$

$$f_5(x) = \sin(x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έστω $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής επί του A , όχι όμως ομοιόμορφα συνεχής επί του A .

Έστω I ένα οποιοδήποτε μη - εκφυλισμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ (δηλ. $I \neq [a, a] \quad \forall a \in \mathbb{R}$) και έστω $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση επί του I .

Αν η f' είναι φραγμένη επί του I , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του I .

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι η f είναι Lipschitz επί του I)

4. Αν f και g είναι Lipschitz συναρτήσεις με Lipschitz σταθερές k και λ επί των X και $f(X)$, αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι η $g \circ f$ είναι Lipschitz συνάρτηση επί του X με σταθερά $k \cdot \lambda$.

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση επί του A .

Αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια Cauchy ακολουθία σημείων του A , τότε να δείξετε ότι $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθία σημείων του $\mathbb{R}$.

ΕΛ. ΤΑΧΤΣΗΣ