Φυλλάδιο 2 στην Πραγματική Ανάλυση – Ακολουθίες συναρτήσεων
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης και Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

1. Να μελετηθεί ως προς την σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση η ακολουθία συναρτήσεων
$$f_n(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

2. Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά επί του $[0,1]$, ενώ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[0,1]$.

3. Έστω $f_n(x) = n\ln(1 + \dfrac{x}{n})$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά επί του $[0,+\infty)$, ενώ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

4. Έστω $f_n(x) = \dfrac{x}{n+x}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.
   (α′) Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ επί του $[0,+\infty)$.
   (β′) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $a > 0$, η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[0,a]$.
   (γ′) Συγκλίνει η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ομοιόμορφα επί του $[0,+\infty)$;

5. Έστω $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
   (α′) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά επί του $\mathbb{R}$.
   (β′) Αν $a > 0$, συγκλίνει η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ομοιόμορφα επί του $[a,+\infty)$; Αν $a = 0$;

6. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες συναρτήσεων επί του A οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα επί του A στις συναρτήσεις f και g, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του A στην συνάρτηση $f + g$.

7. Έστω $f_n(x) = \mathrm{Arc}\tan(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $\mathrm{Arc}\tan$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά επί του $\mathbb{R}$, ομοιόμορφα επί του $[a,+\infty)$ για κάθε $a > 0$, ενώ δεν συγκλίνει ομόιόμορφα επί του $[0,+\infty)$.

8. Έστω $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.
   (α′) Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ επί του $[0,+\infty)$.
   (β′) Να δείξετε ότι αν $a \in (0,1)$, τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[0,a]$.
   (γ′) Να αποδειχθεί ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[0,1]$.

9. Να εξεταστούν ως προς την σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση οι παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων:
   (α′) $f_n(x) = \cos(nx)$, $x \in [0,2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.
   (β′) $g_n(x) = \dfrac{n^2 \ln x}{x^n}$, $x \in [1,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

10. Έστω $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+nx}$, $x \in [0,+\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά, αλλά όχι ομοιόμορφα, επί του $[0,+\infty)$. Επίσης, να δείξετε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a,+\infty)$ για κάθε $a > 0$.

11. Έστω $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά, αλλά όχι ομοιόμορφα, επί του $[0, +\infty)$. Επίσης, να δείξετε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a, +\infty)$ για κάθε $a > 0$.

12. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η εξής ακολουθία συναρτήσεων επί του $[0, 1]$:
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{αν } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2(x - \frac{2}{n}) & \text{αν } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{αν } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$
Να αποδείξετε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά επί του $[0, 1]$ στην $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$, ενώ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

13. Να αποδείξετε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\pi \frac{\sin(nx)}{nx} dx = 0$$
για κάθε $a > 0$.

14. Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $\mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15. Έστω οι ακολουθίες συναρτήσεων:
$$f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N},$$
$$g_n(x) = \frac{1}{ne^{nx}}, \quad x \in [0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$
Να μελετήσετε τις $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ως προς την σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση.

16. Έστω
$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x + n}, \; x \in [0, 1], \; n \in \mathbb{N}.$$
Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο f της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[0, 1]$. Να εξεταστεί αν $f_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f$ και αν $f_n' \to f'$.

17. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συναρτήσεων επί του $A \subseteq \mathbb{R}$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα επί του A. Να αποδείξετε ότι η $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του A. Ισχύει το αντίστροφο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

18. Να αποδείξετε το κριτήριο Cauchy στα κριτήρια ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθιών συναρτήσεων.

19. Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} [\cos(n! \cdot \pi \cdot x)]^{2m}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει σημειακά στην συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$
(Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη διότι οι f_n είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 1]$, ενώ η f δεν είναι - το τελευταίο το γνωρίζετε από τον Απειροστικό Λογισμό Ι).

20. Έστω η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} -x - \dfrac{1}{2n} & \text{αν } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ \dfrac{n}{2}x^2 & \text{αν } x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ x - \dfrac{1}{2n} & \text{αν } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι (f_n) είναι μια ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[-1,1]$ στην $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$ (Προσέξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη). (Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [-1,1]\} \leq \dfrac{3}{2n}$).

21. Από την Θεωρία Συνόλων είναι γνωστό ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών μπορεί να γραφεί στην μορφή $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θεωρούμε την εξής ακολουθία συναρτήσεων επί του $[0,1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \{q_1, q_2, \ldots, q_n\} \\ 0 & \text{αν } x \in [0,1] - \{q_1, q_2, \ldots, q_n\} \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η (f_n) συγκλίνει σημειακά, και όχι ομοιόμορφα, στην συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

22. Έστω $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων επί του $A \subseteq \mathbb{R}$. Έστω ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι συνεχής στο σημείο $a \in A$. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του A τέτοια ώστε $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, ισχύει ότι $\lim_{n \to \infty} f_n(a_n) = f(a)$. Να εφαρμόσετε κατάλληλα το τελευταίο αποτέλεσμα σε κάποια από τις προηγούμενες ασκήσεις για να δείξετε ότι δεν έχετε ομοιόμορφη σύγκλιση.