**Φυλλάδιο 3 στην Πραγματική Ανάλυση – Σειρές συναρτήσεων**

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης και Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

1. Να αποδείξετε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a, +\infty)$ για κάθε $a > 0$.

2. Να αποδείξετε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $\mathbb{R}$.

3. Να μελετηθεί ως προς την σύγκλιση (σημειακή και ομοιόμορφη) η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Να αποδειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$:

   (α′) συγκλίνει ομοιόμορφα επί οποιουδήποτε διαστήματος $[a, b]$, $a < b$.

   (β′) δεν συγκλίνει απόλυτα για καμία τιμή του $x$.

5. Να μελετηθεί ως προς την σύγκλιση η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n+1}$, $x \geq 0$.

6. Να αποδειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[0, \infty)$.

7. Να αποδειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2\cos(nx)+x\sin(nx)+e^x}{n^2}$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα επί του $[0, \pi]$.

8. Να αποδείξετε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[0, 2\pi]$ σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση.

9. Να αποδείξετε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[0, \pi]$ σε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f$ η οποία είναι τέτοια ώστε $\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$.

10. Να αποδείξετε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a, b]$, όπου $1 < a < b$.

11. Να αποδείξετε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}x^n$, όπου $a \in (0, 1)$, συγκλίνει απόλυτα επί του $\mathbb{R}$.

12. Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$, $x \geq 0$. Να μελετηθεί ως προς την σημειακή σύγκλιση. Επίσης, να μελετηθεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση επί των διαστημάτων $[0, \infty)$, $[a, \infty)$, $a > 0$.

13. Να αποδειχθεί ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $A$. Ισχύει το αντίστροφο;

14. Να αποδειχθούν τα παρακάτω:

(α′) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_1^2 \frac{x}{(1+x)^n}dx = \int_1^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}dx.$

(β′) $\int_0^{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(nx)}{e^n}dx = \frac{2e}{e^2-1}.$

(γ′) $\int_0^1 \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2}dx = 1.$

15. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε η σειρά αριθμών $|a_0| + |a_1| + |b_1| + \cdots + |a_n| + |b_n| + \cdots$ συγκλίνει. Να αποδείξετε ότι η σειρά συναρτήσεων $a_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \cdots + a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx) + \cdots$, $x \in [0, 2\pi]$, συγκλίνει ομοιόμορφα.

16. Να μελετηθεί ως προς την σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $x \geq 0$.

17. Να αποδειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{1+x})^n$ συγκλίνει σημειακά επί του διαστήματος $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ στην συνάρτηση $f(x) = 1 + x$. Επίσης, να μελετηθεί η σειρά ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση επί του $(-\frac{1}{2}, +\infty)$.