Φυλλάδιο 4 στην Πραγματική Ανάλυση – Δυναμοσειρές

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης και Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

1. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης R και το άθροισμα της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ στο διάστημα σύγκλισης $(-R, R)$.

2. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η εξής ακολουθία αριθμών: $a_n = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = m! \text{ για κάποιο } m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$.

   Να βρείτε το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

3. Να αποδείξετε ότι $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ για όλα τα $x \in (-1, 1)$.

4. Έστω μια $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ και έστω $a > \frac{1}{R}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε $|a_n| \le b a^n$ για όλα τα $n = 0, 1, 2, \ldots$.

5. Να αποδειχθεί ότι $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots$, $x \in (-1, 1)$.

6. Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot (\frac{x}{n})^{5n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$, και $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 3^n) x^n$.

7. Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^3}(x-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(x+1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (n+5)(x-2)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x-3)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n$.

8. Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\frac{n}{e})^n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3^n}{n} + \frac{5^n}{n^2}) x^n$.

9. Να αποδειχθεί ότι:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \ x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \ x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{Arc}\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \ x \in (-1, 1).$$

10. Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ δύο δυναμοσειρές με ακτίνες σύγκλισης R_1 και R_2, αντίστοιχα, όπου $R_1 \neq R_2$. Να αποδειχθεί ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ είναι $R = \min\{R_1, R_2\}$.

11. Να βρεθεί μια αναπάρασταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{(1+2x)^2}$$

σε δυναμοσειρά σε κατάλληλο διάστημα (a, b).

12. Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{2^n}(x-1)^n.$$

13. Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n^p} x^{2n},$$

όπου p είναι μια σταθερά.

14. Έστω $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για κάθε x στο διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Υποθέτουμε ότι

$$f'(x) = -2xf(x),\ f(0) = 1.$$

Να βρεθούν τα a_n. Αναγνωρίζετε την συνάρτηση f;

15. Να εκφράσετε το

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t-1} dt$$

σαν δυναμοσειρά με κέντρο 1 και να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της σειράς.

16. Έστω

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ |x| < R$$

και $g(x) = f(x^k)$, όπου k είναι ένας θετικός ακέραιος. Να αποδείξετε ότι $g^{(m)}(0) = 0$ αν $m \neq kn$ και $g^{(kn)}(0) = \dfrac{(kn)!}{n!} f^{(n)}(0)$, $n \geq 0$.

17. Έστω ότι $0 = f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ για $|x| < R$ όπου $R > 0$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς. Δείξτε ότι $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

18*. Έστω

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n,\ |x - x_0| < R,$$

και έστω (t_n) μια ακολουθία τέτοια ώστε

(α′) $f(t_n) = 0$ για όλα τα n.

(β′) $t_n \neq x_0$ για όλα τα n.

(γ′) $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x_0$.

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

(**Υπόδειξη**: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Rolle και κατάλληλα την θεωρία στις δυναμοσειρές)