

#1. Έστω $\alpha < c_1 < c_2 < b$ και $f: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στα c_1, c_2 . Έστω

$$g(x) = \begin{cases} k_1, & \text{αν } \alpha \leq x \leq c_1 \\ k_2, & \text{αν } c_1 < x \leq c_2 \\ k_3, & \text{αν } c_2 < x \leq b \end{cases}$$

όπου $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ με $k_1 < k_2 < k_3$. Δείξτε ότι $f \in RS_g[\alpha, b]$

και $\int_{\alpha}^b f dg = f(c_1)(k_2 - k_1) + f(c_2)(k_3 - k_2).$

#2. Έστω $c \in (\alpha, b)$ και έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq c \\ 1, & \text{αν } x = c \end{cases}$$

Έστω $g: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια αυξουσα συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο c . Δείξτε ότι $f \in RS_g[\alpha, b]$ και $\int_{\alpha}^b f dg = 0.$

#3. Έστω

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{αν } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(α) Ισχύει ότι $f \in RS_g[0, 2]$; Αν ναι, υπολογίστε το $\int_0^2 f dg$

(β) Ισχύει ότι $f \in RS_h[0, 2]$; Αν ναι, υπολογίστε το $\int_0^2 f dh.$

7. Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια αυξουσα συνάρτηση. Αν $f \in RS_f[a, b]$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\int_a^b f df = \frac{1}{2} [(f(b))^2 - (f(a))^2].$$

#5. Έστω $f, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φραγμένες συναρτήσεις και $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια αυξουσα συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν $f, h \in RS_g[a, b]$, τότε $\max\{f, h\} \in RS_g[a, b]$ και $\min\{f, h\} \in RS_g[a, b]$.

#6. Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια αυξουσα συνάρτηση. Αν $f \in RS_g[a, b]$ και υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \geq M, \forall x \in [a, b]$, τότε να αποδείξετε ότι $1/f \in RS_g[a, b]$.

#7. Ποιά από τις παρακάτω δύο συνεπαγωγές είναι αληθείς;

(α) $f \in RS_g[a, b] \Rightarrow f^3 \in RS_g[a, b]$

(β) $f^3 \in RS_g[a, b] \Rightarrow f \in RS_g[a, b]$.

#8. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω ολοκληρώματα υπάρχουν και να τα υπολογίσετε.

(α) $\int_3^7 x dg, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & 3 \leq x < 5 \\ 1, & x = 5 \\ 4, & 5 < x \leq 7 \end{cases}$

(β) $\int_0^{2\pi} \sin x dg, \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 2x + \pi, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$.

$$(7) \int_0^{2\pi} \cos x \, dg, \quad g(x) = \begin{cases} \pi, & 0 \leq x \leq \pi \\ x, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$(8) \int_0^{\pi/2} f \, dg, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ x, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(9) \int_0^{2\pi} (x + \cos^2 x) \, dg, \quad g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi \\ x+3, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$(10) \int_0^{2\pi} (\cos x + \sin^2 x) \, dg, \quad g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi \\ x+5, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\left(\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)$$

$$(J) \int_{-2}^2 x \, d(-7x - 3 \cdot (u_0|_{[-2,2]})(x))$$

$$(K) \int_0^2 x \, d(x - [x])$$

$$(L) \int_0^1 x \, d([x^2])$$

$$(M) \int_0^2 x^2 \, d([x^2])$$

$$(N) \int_0^{1/2} f(x) \, d\left(\frac{[x]}{2}\right), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n}, \quad x \in [0, \frac{1}{2}]$$

79. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^e (x^2 + \operatorname{Arctan} x) d(\ln x) \leq \frac{\pi(2\pi+1)}{2}.$$

#10. Να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int_2^e \ln x d(\sqrt{x})$, (β) $\int_2^e \sqrt{x} d(\ln x)$,

(γ) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x) d(\cos^2 x)$, (δ) $\int_1^5 \ln(\sqrt{1+x^2}) d(x^2)$,

(ε) $\int_0^{\pi/2} x d(\sin^3 x)$, (ς) $\int_0^{10} \operatorname{Arctan} x d(x^3)$

(ζ) $\int_2^4 (x + x^2 + [x]) d(\ln x)$

(η) $\int_0^{\pi/4} f dg$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \tan \frac{\pi}{8}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{8} \\ \tan x, & \frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$

(θ) $\int_0^2 x dg$, $g(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$.

(ι) $\int_0^5 x^2 d(u_1(x) + 2u_3(x) - 6u_4(x))$

(κ) $\int_{-2}^2 x d(|x^3|)$.

11. Έστω $c \in (a, b)$ και $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο c . Έστω

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = c \\ 0, & \text{αν } x \in [a, b] - \{c\}. \end{cases}$$

Δείξτε ότι $f \in RS_g[a, b]$ και υπολογίστε το $\int_a^b f dg$.

#12. Έστω $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, $x \in [-2, 2]$.

Δείξτε ότι $f \in BV[-2, 2]$ και υπολογίστε την $V_{-2}^2 f$.

#13. Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz στο $[a, b]$. Να αποδείξετε ότι $f \in BV[a, b]$.

#14. Δείξτε ότι αν $f \in BV[a, b]$ και για κάποιο θετικό αριθμό M έχουμε ότι $|f(x)| > M$, $\forall x \in [a, b]$, τότε $1/f \in BV[a, b]$.