ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι.

#1. Ένας $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν, το $n \times n$ ομογενές σύστημα

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

#2. Ένας $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν, ο A γράφεται ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων.

#3. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τον πίνακα

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι $A(a) \cdot A(b) = A(a+b)$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ βρείτε τον αντίστροφο του $A(a)$.

#4. (α) Βρείτε τους αντιστρόφους (αν υπάρχουν) των παρακάτω πινάκων

(β) Εκφράστε κάθε αντιστρέψιμο πίνακα ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

#5 Βρείτε τους αντιστρόφους (αν υπάρχουν) των πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#6 Να βρεθούν τρεις γραμμικές εξισώσεις που εκφράζουν τα x, y, z συναρτήσει των r, s, t αν

$$\begin{aligned} 2x + y + 4z &= r \\ 3x + 2y + 5z &= s \\ -y + z &= t. \end{aligned}$$

#7. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Έστω $B = e_3(e_2(e_1(A)))$, όπου $e_1 = r_1 \leftrightarrow r_3$, $e_2 = r_3 \to r_3 - 2r_2$, $e_3 = r_1 \to r_1 + r_3$. Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $A = P \cdot B$.

#8 Έστω $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Τότε ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A, αν και μόνο αν, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_m(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $B = P \cdot A$.

#9. Έστω

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Αν είναι δυνατόν, βρείτε έναν πίνακα B τέτοιον ώστε

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

#10. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Αν είναι δυνατόν, βρείτε έναν πίνακα B τέτοιο ώστε $AB = A^2 + 2A$ (όπου $A^2 = A \cdot A$).

#11. Να βρεθούν όλα τα $w \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & w & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος.

#12. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ και έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι $(A^{-1} \cdot B \cdot A)^n = A^{-1} \cdot B^n \cdot A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $X^m = X \cdot X \cdots X$ (m φορές).

#13. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & x \\ -1 & x & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η τιμή του x έτσι ώστε $B = A^{-1}$.

#14. Αν $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$

Βρείτε μια ανάλογη ισότητα για αντιστρέψιμους πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Επίσης, δείξτε ότι $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B \cdot (A+B)^{-1} \cdot A$.

#15. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A^3 = 3I_n + 2A - A^2$.

Να αποδείξετε ότι ο $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμος και $(A + I_n)^{-1} = A^2 - 2I_n$.

#16. Έστω $K \subseteq M_n(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $(AB)^2 = A^2B^2$ για κάθε $A, B \in K$. Δείξτε ότι $A \cdot B = B \cdot A$, $\forall A, B \in K$.

#17. Σωστό ή λάθος;

(α) Αν $A\Gamma = B\Gamma$ και Γ αντιστρέψιμος, τότε $A = B$

(β) Αν $AB = O$ και B αντιστρέψιμος, τότε $A = O$.

(γ) Αν $AB = \Gamma$ και δύο από τους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, τότε και ο τρίτος είναι αντιστρέψιμος.

(δ) Αν $AB = \Gamma$ και δύο από τους πίνακες είναι μη-αντιστρέψιμοι, τότε και ο τρίτος είναι μη-αντιστρέψιμος.

(ε) Αν ο A^2 είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A^3 είναι αντιστρέψιμος.

(στ) Αν ο A^3 " " " A^2 " ".

(ζ) Κάθε αντιστρέψιμος πίνακας είναι στοιχειώδης.

(η) Κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

(θ) Αν A, B είναι αντιστρέψιμοι, τότε ο $A+B$ είναι αντιστρέψιμος και $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

(ι) Αν A, B είναι αντιστρέψιμοι τότε ο AB είναι αντιστρέψιμος και $(AB)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$.

(κ) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο $A + A^t$ είναι αντιστρέψιμος.

(λ) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο $A+A$ είναι αντιστρέψιμος.

(μ) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ τ.ω. ο A^2 είναι αντιστρέψιμος. Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.

<u>Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας!</u>

\#18. Ένας $n \times n$ πίνακας A λέγεται <u>μηδενοδύναμος</u> αν $A^k = O_{n\times n}$ για κάποιο θετικό ακέραιο k. Δείξτε ότι αν A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A δεν είναι μηδενοδύναμος.

\#19. Να δώσετε ένα παράδειγμα δύο μη-αντιστρέψιμων πινάκων των οποίων το άθροισμα είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

\#20. Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας.

(α) Αν εναλλάξουμε δύο γραμμές του A, πώς συνδέεται ο αντίστροφος του προκύπτοντος πίνακα με τον A^{-1};

(β) Το ίδιο ερώτημα αν πολλαπλασιαστεί μια γραμμή του A επί $k \neq 0$.

(γ) Το ίδιο ερώτημα αν στην i γραμμή του A προσθέσουμε k φορές την j γραμμή του A.

(Υπόδειξη: Θυμηθείτε ότι $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ για αντιστρέψιμους $A, B \in M_n(\mathbb{R})$).

—— o ——