ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4 (ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ)

#1. Να αποδειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+b & a+c \\ 1 & b+a & 0 & b+c \\ 1 & c+a & c+b & 0 \end{vmatrix} = -4(ab+bc+ca)$$

#2. Να αποδειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & (b-c)^2 & a^2+2bc \\ c^2+a^2 & (c-a)^2 & b^2+2ca \\ a^2+b^2 & (a-b)^2 & c^2+2ab \end{vmatrix} = 2(a^2+b^2+c^2)(b-a)(c-a)\left[c(c+a)-b(b+a)\right]$$

#3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

(α) $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2\lambda-3 \\ 1 & \lambda & -\lambda \\ 3\lambda-1 & 2\lambda+6 & 4\lambda \end{vmatrix} = 0$, (β) $\begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = 0$,

(γ) $\begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 7 & x-5 & 1 \\ 6 & -6 & x+2 \end{vmatrix} = 0$, (δ) $\begin{vmatrix} 2\cos x-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2\cos x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2\cos x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2\cos x-1 \end{vmatrix} = 0$

(ε) $\begin{vmatrix} x+1 & 5 & 3 \\ -1 & x-4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$

#4 Έστω ο $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

ΝΔο $\det A = (a+n-2)(a-2)^{n-1}$

Να βρείτε επίσης την $\det(\operatorname{adj} A)$.

#5 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ με περισσότερα από $n^2 - n$ μηδενικά στοιχεία. ΝΔο $\det A = 0$.

#6. ΝΔο

$$\begin{vmatrix} \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 3x & \cos 4x & \cos 5x \\ \cos 5x & \cos 6x & \cos 7x \end{vmatrix} = 0.$$

#7. Έστω μια συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & \sin x \cos x \\ \sin x & \cos x & -\cos x \\ -\cos x & -\sin x & 1 - \sin x \cos x \end{vmatrix}$$

(α) Να βρεθούν το πεδίο ορισμού της f και το σύνολο τιμών της f.

(β) ΝΔο η f είναι άρτια συνάρτηση.

#8. Δείξτε ότι τρία σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) του επιπέδου είναι συγγραμμικά (βρίσκονται δηλ. πάνω στην ίδια ευθεία) αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

#9. Υπολογίστε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

#10. Έστω $A, B, P \in M_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε P αντιστρέψιμος και $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Δείξτε ότι $\det B = \det A$.

#11. Έστω A ένας αντισυμμετρικός πίνακας (δηλ. $A^t = -A$) ΝΔο $\det A = (-1)^n \cdot \det A$.

#12. Σωστό ή λάθος;

(α) $\det(k \cdot A) = k \det A$, όπου $k \in \mathbb{R}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(β) $\det(kA) = k^n \cdot \det A$, " " ".

(γ) $\det(AA^t) = \det(A^tA) = (\det A)^2$

(δ) Αν σε ένα $A \in M_n(\mathbb{R})$ εναλλαχθούν δύο γραμμές και δύο στήλες, η ορίζουσα του A αλλάζει πρόσημο.

(ε) Αν $\det A = 2$, $\det B = 3$, τότε $\det(A+B) = 5$

(στ) Αν $\det A = 2$, $\det B = 3$, τότε $\det(AB) = 6$.

(ϑ) Το γινόμενο ενός πίνακα επί τον adjoint του είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

(η) Ο αντίστροφος του adjoint ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ο πίνακας των συμπαραγόντων του A.

#13. Βρείτε τον adjoint του πίνακα
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

#14. Να δείξετε ότι $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

#15. $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν, $\operatorname{adj} A$ είναι αντιστρέψιμος.

#16. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος, όπου $n > 1$. ΝΔο $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-2} \cdot A$.

#17. ΝΔο ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου άνω-τριγωνικού πίνακα είναι άνω τριγωνικός.

#18. Όπου είναι δυνατόν, να λυθούν τα παρακάτω συστήματα με μέθοδο Cramer.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = 4 \end{cases}.$$

#19. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$
\begin{aligned}
x_1 + \lambda x_3 &= -2(x_2 + x_3) \\
2x_1 + 3(x_2 + x_3) &= -\lambda x_3 \\
3x_1 + 6\lambda x_2 + 7x_3 &= x_2
\end{aligned}
$$

έχει μοναδική λύση (χρησιμοποιώντας ορίζουσες). Για κάθε μια από τις τιμές του λ να βρεθεί η μοναδική λύση με μέθοδο Cramer.

Ε. ΤΑΧΤΣΗΣ