(Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα).

#1. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. (Έστω λ ιδιοτιμή του AB και θ.δ.ο. λ ιδιοτιμή του BA. Διακρίνω δύο περιπτώσεις:

(α) $\lambda = 0$

(β) $\lambda \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή εργαστείτε με τον ορισμό.

Παρόμοια, λ ιδιοτιμή $BA \Rightarrow \lambda$ ιδιοτιμή AB).

#2. Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & a & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ και έστω $u = (1, 1, 0)$.

Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το διάνυσμα u είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

#3. Να αποδείξετε ότι οι ιδιοτιμές ενός άνω (ή κάτω) τριγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι τα διαγώνια στοιχεία του A

#4. Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ όπου $a_{ij} = 1$ για όλα τα $i = 1, \dots, n$ και όλα τα $j = 1, \dots, n$. Επίσης, βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο.

#5. Έστω οι πίνακες

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

και έστω τα διανύσματα

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ποιά είναι ιδιοδιανύσματα του A_1 και ποιά του A_2; Σε κάθε περίπτωση βρείτε την ιδιοτιμή.

#6. Βρείτε τις ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, ιδιοχώρους των παρακάτω πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -5 \\ 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & -2 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

#7. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ και έστω $P \in M_n(\mathbb{R})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Δείξτε ότι οι πίνακες A και $P^{-1}AP$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

#8. Με κατάλληλο αντιπαράδειγμα βρείτε ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ που δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A^t.

#9 Σωστό ή λάθος;

(1) κάθε $n \times n$ πίνακας έχει πραγματικές ιδιοτιμές

(2) κάθε $n \times n$ πίνακας έχει n διακεκριμένες (πιθανόν μιγαδικές) ιδιοτιμές

(3) κάθε $n \times n$ πίνακας έχει n όχι απαραίτητα διακεκριμένες και πιθανόν μιγαδικές ιδιοτιμές.

(4) Αν u είναι ιδιοδιάνυσμα του A, τότε u είναι ιδιοδιάνυσμα του $A + c \cdot I_n$, για όλα τα $c \in \mathbb{R}$.

5) Αν λ είναι ιδιοτιμή του A, τότε λ είναι ιδιοτιμή του $A + c \cdot I_n$, για όλα τα $c \in \mathbb{R}$.

6) Αν u είναι ιδιοδιάνυσμα ενός αντιστρέψιμου πίνακα A, τότε $c \cdot u$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A^{-1} για όλα τα $c \neq 0$.

(7) Αν ένας 3×3 πίνακας έχει ιδιοτιμές τις $1,1,2$, τότε ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

(8) Αν οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A είναι $-1,1,2$, τότε $\det(A^{-1})^t = -\frac{1}{2}$.

#10. Να υπολογίσετε τα $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

αν τα διανύσματα $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$ είναι ιδιοδιανύσματα του A. Να βρείτε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του A. Ποιές είναι οι ιδιοτιμές του A^4;

#11 Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

Να εκφράσετε τους πίνακες A^{-2} και A^5 ως συναρτήσεις των A και I_2.

#12. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

(ii) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του B^{-1}, όπου $B = A^3 + 4A^2 - 5I_5$

[illegible]. Να βρείτε έναν πίνακα A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 7\lambda + 4$$

Αντιστρέφεται ο A; Αν ναι, ποιός είναι ο A^{-1};

≠ 14. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Να βρείτε τον πίνακα $B = 3 \cdot A^{2005} - 6A + I_3$.