

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Newton-Raphson)

1. Για την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x - 5$ που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο πρόγραμμα, είδαμε ότι με αρχική προσέγγιση $x_0 = 3$, η μέθοδος N-R συνέκλινε προς την ρίζα. Να δώσετε μια εξήγηση γιατί συμβαίνει αυτό. Επιπλέον, να εξηγήσετε γιατί οποιαδήποτε αρχική τιμή $x_0 > \sqrt[3]{2}/3$ θα οδηγούσε σε σύγκλιση. Με τι τάξη σύγκλισης συγκλίνει η μέθοδος προς την ρίζα; (Για την απάντησή σας, να μην χρησιμοποιήσετε την γνωστή, από το αποτέλεσμα του προγράμματος, τιμή της ρίζας)
2. Να προσεγγίσετε τις ρίζες της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x - 1$ χρησιμοποιώντας την Newton-Raphson μέθοδο. Ξεκινήστε με τις παρακάτω αρχικές προσεγγίσεις:
(α) $x_0 = 2$,
(β) $x_0 = 0$,
(γ) $x_0 = -2$.
 - Να εξηγήσετε σε κάθε περίπτωση τα αποτελέσματα που λάβατε.
 - Να δώσετε το σύνολο των αρχικών τιμών x_0 για τις οποίες η σύγκλιση είναι εξασφαλισμένη.
3. Να εφαρμόσετε την μέθοδο Newton-Raphson για να προσεγγίσετε την $\sqrt[4]{7}$.
4. Η εξίσωση $\ln x = x - 2$ έχει δύο λύσεις. Να τις προσεγγίσετε χρησιμοποιώντας την μέθοδο N-R. Τι συμβαίνει αν $x_0 = 1/2$;
5. Η εξίσωση $e^x = 3x$ έχει δύο λύσεις. Να τις προσεγγίσετε χρησιμοποιώντας την μέθοδο N-R.
6. Στην άσκηση 5, να εφαρμόσετε πρώτα την μέθοδο της διχοτόμησης (2-3 επαναλήψεις και **εφόσον βρείτε πρώτα τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano**) για να βρείτε δύο αρχικές προσεγγίσεις x_0 και x_0^* των δύο ριζών. Στην συνέχεια αλλάξτε σε Newton-Raphson ξεκινώντας με τις αρχικές τιμές που βρήκατε.

Παρατήρηση : Οι παραπάνω ασκήσεις είναι τέτοιες ώστε να μπορείτε να βρείτε ποιες αρχικές τιμές x_0 θα οδηγήσουν σε σύγκλιση και ποιες όχι. Στην συνέχεια, χρειάζεστε τον υπολογιστή για να μάθετε ποιες είναι οι ρίζες.