

Δεύτερο Φυλλάδιο Εργασίας
Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά (ΠΜΣ)
 Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών
 Πανεπιστήμιο Αιγαίου
 Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

Πρώτο Θέμα

Έστω ότι μια αγορά περιέχει μια μετοχή καθώς και μερικά συμβόλαια αγοράς και πώλησης γραμμένα σε αυτή. Ας υποθέσουμε ότι πιστεύετε ότι η μελλοντική πορεία της μετοχής ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown ως ακολούθως:

$$S_t = 200 + 0.2 \int_0^t S_r dr + 0.03 \int_0^t S_r dW_r, \quad t \in [0, T]$$

όπου 200 είναι η σημερινή τιμή της μετοχής και T είναι ο χρόνος λήξης των συμβολαίων προαίρεσης. Το παραπάνω αποτελεί ένα είδος πρόβλεψης για την μελλοντική συμπεριφορά της αξίας μιας μετοχής. Μια άλλου είδους πρόβλεψη είναι για παράδειγμα $S_T \in A \subseteq \mathbb{R}_+$ όπου σε αυτή προβλέπει κανείς το σύνολο τιμών που πρόκειται να βρεθεί η αξία της μετοχής.

Έστω ότι θέλετε να επενδύσετε 1.000 Ευρώ στα παραπάνω με χρονικό ορίζοντα το χρόνο T αλλά με μέγιστη πιθανή ζημιά το ποσό των 800 Ευρώ.

- Βρείτε ένα διάστημα (c, v) τ.ω.

$$\mathbb{P}(S_T \in (c, v)) \geq 0.7$$

- Διατυπώστε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης η λύση του οποίου θα μας δώσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα είναι όσο δυνατόν πιο κερδοφόρο στο σενάριο $S_T \in (c, v)$ αλλά η μέγιστη πιθανή ζημιά να είναι το ποσό των 800 Ευρώ.
- Το διάστημα (c, v) που υπολογίσατε είναι το μοναδικό με αυτή την ιδιότητα ή υπάρχουν πολλά;
- Αν πράγματι η πρόβλεψη σας για την κίνηση της μετοχής είναι ότι ακολουθεί την παραπάνω γεωμετρική κίνηση Brown τότε θα είναι ενδιαφέρον να επιλυθεί το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Έστω $K_1 < \dots < K_n$ οι τιμές εξάσκησης των συμβολαίων προαίρεσης και έστω το σύνολο $G = (0, K_n + \varepsilon)$ όπου ε μικρός θετικός αριθμός. Να βρεθεί το κατάλληλο σύνολο $A \subseteq G$ αλλά και το κατάλληλο χαρτοφυλάκιο έτσι ώστε

$$\begin{aligned} & W_1 \max_{A \subseteq G} \int_A \Pi(x) dx + W_2 \max_{A \subseteq G} \Pi(x) \\ \text{δεδομένου ότι } & \mathbb{P}(S_T \in A) \geq 0.7 \\ & \Pi(x) \geq 0, \quad \forall x \in A \\ & \Pi(x) \geq -D, \quad \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

όπου $\Pi(x)$ είναι η συνάρτηση κέρδους και W_1, W_2 βάρη ορισμένα από τον επενδυτή.

Περιγράψτε με λόγια τι ακριβώς θα υπολογίσουμε λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης. Διαπιστώστε ότι αν η πρόβλεψη σας είναι μόνο ότι η S_T ακολουθεί μια συγκεκριμένη κατανομή τότε η επιλογή του συνόλου A είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τα διαθέσιμα συμβόλαια προαίρεσης.

Ένας επενδυτής μπορεί να ενδιαφέρεται για κάποιο είδους χαρτοφυλάκιο με διαφορετικές ιδιότητες, π.χ. χαμηλή διακύμανση, υψηλή μέση τιμή κ.α. Αυτό θα πρέπει να μοντελοποιηθεί σε ένα κατάλληλο μαθηματικό πρόβλημα του οποίου η λύση θα δώσει το ζητούμενο χαρτοφυλάκιο.

Ως εκ τούτου μπορούν να ορισθούν «άπειρα» προβλήματα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου ανάλογα με τις ανάγκες των επενδυτών.

Σκεπτόμενος ως επενδυτής σκεφτείτε τι είδους χαρτοφυλάκιο θα σας ενδιέφερε να κατασκευάσετε και στη συνέχεια διατυπώστε το κατάλληλο μαθηματικό πρόβλημα.

- Αν διαλέξουμε το $\mathbb{R}_+$ ως διάστημα υπάρχει περίπτωση να έχουμε κερδοφόρο χαρτοφυλάκιο; Πως μπορούμε να το εξετάσουμε αυτό; Αν υπάρχει τέτοιο χαρτοφυλάκιο τότε υπάρχει ευκαιρία σίγουρου κέρδους στην αγορά.
- Διαπιστώστε ότι όπως τέθηκαν τα παραπάνω ερωτήματα και προβλήματα δεν χρειάζεται να υποθέσουμε κάτι τόσο πολύπλοκο για την κίνηση της μετοχής αλλά μόνο για το ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ. S_T .
- Προσπαθήστε να διατυπώσετε παρόμοια μαθηματικά προβλήματα στην περίπτωση όπου στην αγορά υπάρχουν m το πλήθος μετοχές καθώς και τα αντίστοιχα συμβόλαια προαίρεσης για την κάθε μια. Η μετατροπή ενός πραγματικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα ονομάζεται μαθηματική μοντελοποίηση.

Δεύτερο Θέμα

Στη σελίδα 208 του βιβλίου Mathematics for Finance θα βρείτε απλές στρατηγικές επένδυσης μαζί με το γράφημα των αντίστοιχων συναρτήσεων κέρδους. Περιγράψτε σε κάθε στρατηγική σε ποιο σενάριο είναι κερδοφόρο. Στη συνέχεια διαπιστώστε ότι η επίλυση του προβλήματος 1.3 των σημειώσεων μας οδηγεί σε πιο πολύπλοκες στρατηγικές ανάλογα με το τι ζητάμε.

Τρίτο Θέμα

Έστω ότι έχουμε υπολογίσει την αξία ενός call option εφαρμόζοντας τη θεωρία των Black-Scholes.

- Αν $F(t, x)$ είναι η λύση της εξίσωσης των Black-Scholes δείξτε ότι το πλήθος των μετοχών που πρέπει να περιέχει το προτεινόμενο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο στη χρονική στιγμή t είναι ίσο με την μερική παράγωγο της F ως προς x .
- Δείξτε ότι η μερική παράγωγος της F ως προς x είναι αύξουσα συνάρτηση του x .
- Δεδομένου ότι στην πράξη δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε το προτεινόμενο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο σε συνεχή χρόνο η κατασκευή αυτή θα πρέπει να γίνει σε διακριτό χρόνο, προσεγγιστικά. Αυτό όμως μαζί με το ότι η F_x είναι αύξουσα μας οδηγεί σε μια στρατηγική «αγόρασε ακριβά-πούλα φθηνά». Η στρατηγική αυτή μάλλον δεν πρέπει να εφαρμοσθεί με πραγματικά χρήματα-;) Μπορείτε να κατασκευάσετε μια στρατηγική που ακολουθεί την αρχή «αγόρασε φθηνά-πούλα ακριβά»;
- Στη θεωρία των Black-Scholes θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τη μεταβλητότητα σ . Ο υπολογισμός αυτής της παραμέτρου θα πρέπει να γίνει χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα. Με απλά λόγια το σ είναι συνάρτηση του γραφήματος των παρελθοντικών τιμών της μετοχής. Αυτό όμως που χρειαζόμαστε είναι το σ των μελλοντικών τιμών της μετοχής το οποίο βεβαίως εξαρτάται από το γράφημα των μελλοντικών τιμών της μετοχής. Αυτό σημαίνει ότι η επιλογή του σ αποτελεί μια πρόβλεψη για την μελλοντική συμπεριφορά των τιμών της μετοχής και ως εκ τούτου δεν πρόκειται να συμφωνούν όλοι σε μια συγκεκριμένη πρόβλεψη.
- Αν στην αγορά υπάρχουν n το πλήθος συμβόλαια προαίρεσης διαπιστώνουμε ότι οι αξίες τους είναι σε συγκεκριμένη σειρά. Εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό. Έστω ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα νέο συμβόλαιο προαίρεσης με τιμή εξάσκησης μεταξύ των K_1 και K_2 . Τότε προφανώς η αξία του θα πρέπει να βρίσκεται σε ένα συγκεκριμένο διάστημα όπως εξηγήσατε παραπάνω. Έστω ότι θέλω να υπολογίσω την αξία του συμβολαίου αυτού εφαρμόζοντας τη θεωρία των Black-Scholes. Αν υπολογίσω (προβλέψω) το σ μέσω ιστορικών δεδομένων η

τιμή που θα πάρω δεν θα είναι λογική σε σχέση με τα υπάρχοντα συμβόλαια και αυτό διότι η θεωρία αυτή δεν λαμβάνει υπόψη της τα διαθέσιμα συμβόλαια προαίρεσης. Το ίδιο βέβαια συμβαίνει για οποιοδήποτε συμβόλαιο πιο περίπλοκο από τα γνωστά call and put options.

Τέταρτο Θέμα

Έστω ότι στην αγορά υπάρχει μια μετοχή καθώς και ορισμένα call and put options με τιμές εξάσκησης $K_1 < \dots < K_n$. Ας υποθέσουμε ότι θέλετε να πουλήσετε ένα νέο συμβόλαιο με συνάρτηση απολαβής $f(x)$ η οποία όμως είναι τμηματικά γραμμική με πεπερασμένους κλάδους. Η ιδιότητα αυτή θα πρέπει να ισχύει όσο τα διαθέσιμα συμβόλαια προαίρεσης έχουν αυτή την ιδιότητα. Προκειμένου να μην δημιουργηθεί ευκαιρία σίγουρου κέρδους (Arbitrage) θα πρέπει η τιμή πώλησης να είναι στο διάστημα που ορίζουν τα προβλήματα βελτιστοποίησης 1.16 και 1.17 των σημειώσεων. Αυτό σημαίνει ότι ο υπολογισμός του διαστήματος αυτού θα μας δώσει μια λογική τάξη μεγέθους της αξίας του συμβολαίου. Αν το διάστημα είναι πολύ μεγάλο τότε μπορεί κάποιος να υπολογίσει την δίκαιη τιμή Y^{D*} και να έχει μια πιο σαφή εικόνα της τάξης μεγέθους. Προφανώς η τιμή πώλησης του συμβολαίου θα προκύψει σύμφωνα με το νόμο της προσφοράς και της ζήτησης. Εξηγήστε με λεπτομέρεια όλα τα παραπάνω και εξηγήστε τι αποτέλεσμα θα πάρετε αν θέλετε να πουλήσετε ένα νέο call option με τιμή εξάσκησης μεταξύ των K_1 και K_2 . Ποια είναι τα χαρτοφυλάκια που αντιστοιχούν στα προβλήματα 1.16, 1.17 και κατά τον υπολογισμό της Y^{D*} ; Είναι πραγματοποιήσιμα στην πράξη;

Πέμπτο Θέμα

Έστω ότι έχετε μια μετοχή της Tesla την οποία είχατε αγοράσει στην τιμή των 150 ευρώ ενώ η σημερινή τιμή είναι 240 ευρώ.

- Έστω ότι πουλήσατε ένα call option $C(500) = X$ ευρώ το οποίο λήγει σε 3 μήνες. Θα έχετε σίγουρο κέρδος σε κάθε περίπτωση μετά από τρεις μήνες; Αν ναι, η τιμή πώλησης X πρέπει να είναι συγκεκριμένη ή όχι; Σχολιάστε την απάντησή σας.
- Έστω ότι πουλήσατε ένα put option $P(100) = Y$ ευρώ το οποίο λήγει σε 3 μήνες. Θα έχετε σίγουρο κέρδος σε κάθε περίπτωση μετά από τρεις μήνες; Αν ναι, η τιμή πώλησης Y πρέπει να είναι συγκεκριμένη ή όχι; Σχολιάστε την απάντησή σας.