**Στην πολυμεταβλητή περίπτωση** $\vartheta^T = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_d) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{1\times d}$, το μοντέλο δειγματοληψίας ανήκει στην EF όταν μπορεί να τεθεί στην μορφή:

$$\pi(x_i|\vartheta) \propto h(x_i)\exp\left\{c(\vartheta)^T t(x_i)\right\},$$

όπου $c(\vartheta)^T = (c_1(\vartheta), \dots, c_d(\vartheta))$ το διάνυσμα των φυσικών παραμέτρων, $t(x_i)^T = (t_1(x_i), \dots, t_d(x_i))$ με $c(\vartheta)^T t(x_i) = \sum_{j=1}^{d} c_j(\vartheta) t_j(x_i)$ και σταθερά κανονικοποίησης $g(\vartheta)$, που δίνεται από τη σχέση:

$$g(\vartheta) = \left[\int_{\mathbb{R}} h(x_i)\exp\left(c(\vartheta)^T t(x_i)\right)dx_i\right]^{-1},$$

**ενώ ο χώρος καταστάσεων της τυχαίας μεταβλητής** $x_i$**, δηλαδή ο χώρος δειγματοληψίας, δεν θα πρέπει να εξαρτάται από την παράμετρο** $\vartheta$.

Θέτοντας $A(\vartheta) = \log\int_{\mathbb{R}} h(x_i)\exp\left[c(\vartheta)^T t(x_i)\right]dx_i$ έχουμε την ισοδύναμη αναπαράσταση

$$\pi(x_i|\vartheta) = h(x_i)\exp\left[c(\vartheta)^T t(x_i) - A(\vartheta)\right].$$

Η πιθανοφάνεια για δειγματοληπτική κατανομή που είναι μέλος της EF είναι:

$$\pi(x|\vartheta) = h(x) g(\vartheta)^n \exp\left[\sum_{i=1}^{n} c(\vartheta)^T \cdot t(x_i)\right] = h(x) g(\vartheta)^n \exp\left[c(\vartheta)^T \cdot \sum_{i=1}^{n} t(x_i)\right]$$
$$= h(x) g(\vartheta)^n \exp\left[c(\vartheta)^T \cdot t(x)\right] \overset{\vartheta}{\propto} g(\vartheta)^n \exp\left[c(\vartheta)^T \cdot t(x)\right],$$

Όπου

$$t(x)^T = \sum_{i=1}^{n} t(x_i)^T = \sum_{i=1}^{n} \left(t_1(x_i),\ldots,t_d(x_i)\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} t_1(x_i),\ldots,\sum_{i=1}^{n} t_d(x_i)\right) = \left(t_1(x),\ldots,t_d(x)\right),$$

η $d$ -διάστατη επαρκής στατιστική και $h(x) = \prod_{i=1}^{n} h(x_i)$.

Υποθέτοντας ότι $g(\vartheta) = g_1(\vartheta)\cdots g_r(\vartheta)$ θέτουμε σαν NCP

$$\pi_{NCP}(\vartheta) = \pi(\vartheta \mid \delta, b) \propto g_1(\vartheta)^{\delta_1}\cdots g_r(\vartheta)^{\delta_r} \exp\left[c(\vartheta)^T \cdot b\right],$$

όπου $\delta^T = (\delta_1,\ldots,\delta_r)$ και $b^T = (b_1,\ldots,b_d)$ υπερπαράμετροι. Η posterior τότε παίρνει την συζυγή μορφή:

$$\pi(\vartheta|x) = \pi\left(\vartheta \mid \delta + n\mathfrak{e}, b + t(x)\right) \propto g_1(\vartheta)^{n+\delta_1}\cdots g_r(\vartheta)^{n+\delta_r} \exp\left\{c(\vartheta)^T \cdot \left(b + t(x)\right)\right\},$$

όπου $\mathfrak{e}^T = (1,\ldots,1)$.

**Για normal μοντέλο δειγματοληψίας** με άγνωστα location $\vartheta_1$ και precision $\vartheta_2$, δηλαδή $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2) = (\mu, \tau)$, έχουμε:

$$\pi(x_i \mid \mu, \tau) = N\left(x_i \mid \mu, \tau^{-1}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(x_i - \mu)^2\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}\left(\mu^2 + 2\mu x_i + x_i^2\right)\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu^2\tau}{2}\right) \exp\left(\mu\tau x_i - \frac{\tau}{2} x_i^2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu^2\tau}{2}\right) \exp\left\{\left(\mu\tau,\ -\frac{\tau}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ x_i^2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Με EF παραμέτρους:

$$h(x_i) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\ ,\ g(\mu,\tau) = g_1(\mu,\tau)\, g_2(\mu,\tau),\ g_1(\mu,\tau) = \tau^{1/2},\ g_2(\mu,\tau) = \exp\left(-\frac{\mu^2\tau}{2}\right),$$

$$c(\mu,\tau)^T = \left(\mu\tau,\ -\frac{\tau}{2}\right),\ t(x_i)^T = \left(x_i,\ x_i^2\right).$$

Η πιθανοφάνεια είναι

$$\pi(x|\mu,\tau) \overset{\mu,\tau}{\propto} \tau^{\,n/2} \exp\left(-\frac{n\mu^2\tau}{2}\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\mu\tau,\ -\frac{\tau}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ x_i^2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \tau^{\,n/2} \exp\left(-\frac{n\mu^2\tau}{2}\right) \exp\left(\left(\mu\tau,\ -\frac{\tau}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}\right),$$

με $t_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ και $t_2(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ .

**Παρατηρείστε ότι:** ισοδύναμα, την πιθανοφάνεια μπορούμε να τη φέρουμε εξ' αρχής στην μορφή

$$\pi(x|\mu,\tau) \overset{\mu,\tau}{\propto} \tau^{\,n/2} \exp\left(-\frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right) = \tau^{\,n/2} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}\left((n-1)S^2 + n(\mu-\overline{x})^2\right)\right\}.$$

Πράγματι θέτοντας $(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\overline{x})-(\mu-\overline{x})\right)^2 = (n-1)S^2 + n(\mu-\overline{x})^2 .$$

Ενώ είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η στατιστική $S^2$, είναι συνάρτηση των επαρκών στατιστικών $t_1(x)$ και $t_2(x)$.

Η συζυγείς a-priori κατανομή με υπερπαραμέτρους $\delta^T = (\delta_1, \delta_2)$ και $b^T = (b_1, b_2)$ θα είναι:

$$
\begin{aligned}
\pi_{NCP}(\mu,\tau) &\propto \tau^{\delta_1/2} \exp\left(-\frac{\delta_2 \tau \mu^2}{2}\right) \exp\left\{\left(\tau\mu, -\frac{\tau}{2}\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \tau^{\delta_1/2} \exp\left(-\frac{\delta_2 \tau \mu^2}{2}\right) \exp\left(\mu\tau b_1 - \frac{b_2 \tau}{2}\right) \\
&= \tau^{\delta_1/2} \exp\left(-\frac{b_2 \tau}{2}\right) \exp\left(-\frac{\delta_2 \tau \mu^2}{2} + \mu\tau b_1\right) \\
&\overset{\mu,\tau}{\propto} \tau^{\delta_1/2}\tau^{-1/2} \exp\left(-\frac{b_2\tau}{2}\right)(\delta_2\tau)^{1/2} \exp\left(-\frac{\delta_2\tau}{2}\left(\mu^2 - 2\frac{b_1}{\delta_2}\mu\right)\right) \\
&\overset{\mu,\tau}{\propto} N\left(\mu \,|\, \frac{b_1}{\delta_2}, \frac{1}{\tau\delta_2}\right) Ga\left(\tau \,|\, \frac{\delta_1+1}{2}, \frac{1}{2}\left(b_2 - \frac{b_1^2}{\delta_2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Παρατηρώντας ότι το παρακάτω σύστημα ως προς $\alpha_0, \beta_0, \mu_0$ και $\kappa_0$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{\delta_1 + 1}{2} \\
\beta_0 &= \frac{1}{2}\left(b_2 - \frac{b_1^2}{\delta_2}\right) \\
\mu_0 &= \frac{b_1}{\delta_2} \\
\kappa_0 &= \delta_2
\end{aligned}
\right\}
$$

έχει μοναδική λύση $\left\{\begin{aligned} \delta_1 &= 2\alpha_0 - 1 \\ \delta_2 &= \kappa_0 \\ b_1 &= \kappa_0\mu_0 \\ b_2 &= 2\beta_0 + \kappa_0\mu_0^2 \end{aligned}\right\}$, απλοποιούμε τον NCP – prior στη μορφή

$$\pi_{NCP}\left(\mu,\tau\right)=\pi_{NCP}\left(\mu|\tau\right)\pi_{NCP}\left(\tau\right)=N\left(\mu\,|\,\mu_0,\left(\kappa_0\tau\right)^{-1}\right)Ga\left(\tau\,|\,\alpha_0,\beta_0\right).$$

Ορισμός: Λέμε ότι η από κοινού συνεχής κατανομή $\left(x,y\right)\sim Ng\left(\mu_0,\kappa_0,\alpha_0,\beta_0\right)$ είναι **Normal – Gamma**, όταν:

$$Ng\left(x,y|\,\mu_0,\kappa_0,\alpha_0,\beta_0\right)=N\left(x|\,\mu_0,\left(\kappa_0 y\right)^{-1}\right)Ga\left(y|\alpha_0,\beta_0\right),$$

$$\alpha_0>0,\ \beta_0>0,\ -\infty<\mu_0<\infty,\ \kappa_0>0.$$

Είναι εμφανές τώρα ότι η συζυγής posterior θα πρέπει να έχει τη μορφή:

$$\pi\left(\mu,\tau|x\right)=Ng\left(\mu,\tau\,|\,\mu_n,\kappa_n,\alpha_n,\beta_n\right)=N\left(\mu|\mu_n,\left(\kappa_n\tau\right)^{-1}\right)Ga\left(\tau|\alpha_n,\beta_n\right).$$

$$\overset{\mu,\tau}{\propto}\ \tau^{1/2}\exp\left(-\frac{\kappa_n\tau}{2}\left(\mu-\mu_n\right)^2\right)\tau^{\alpha_n-1}\exp\left(-\beta_n\tau\right)=\tau^{\alpha_n-1/2}\exp\left\{-\frac{\tau}{2}\left[2\beta_n+\kappa_n\left(\mu-\mu_n\right)^2\right]\right\}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε για την posterior ότι

$$\pi\left(\mu,\tau|x\right)\propto N\left(\mu\,|\,\mu_0,\left(\kappa_0\tau\right)^{-1}\right)Ga\left(\tau\,|\,\alpha_0,\beta_0\right)$$

$$\times\,\tau^{\,n/2}\exp\left\{-\frac{\tau}{2}\left(\left(n-1\right)S^2+n\left(\mu-\overline{x}\right)^2\right)\right\}$$

$$\propto\tau^{1/2}\exp\left(-\frac{\kappa_0\tau}{2}\left(\mu-\mu_0\right)^2\right)\tau^{\alpha_0-1}\exp\left(-\beta_0\tau\right)\tau^{\,n/2}\times\exp\left\{-\frac{\tau}{2}\left(\left(n-1\right)S^2+n\left(\mu-\overline{x}\right)^2\right)\right\}$$

$$=\tau^{\alpha_0+\frac{n-1}{2}}\exp\left\{-\frac{\tau}{2}\left[2\beta_0+\kappa_0\left(\mu-\mu_0\right)^2+\left(n-1\right)S^2+n\left(\mu-\overline{x}\right)^2\right]\right\}$$

Συγκρίνοντας τις δύο αναπαραστάσεις για την posterior, έχουμε ότι $\alpha_n=\alpha_0+\dfrac{n}{2}$ και ότι τα πολυώνυμα ως προς $\mu$ στα εκθετικά, πρέπει να είναι εκ ταυτότητας ίσα, δηλαδή

$$2\beta_n + \kappa_n (\mu - \mu_n)^2 \triangleq 2\beta_0 + \kappa_0 (\mu - \mu_0)^2 + (n-1) S^2 + n(\mu - \overline{x})^2$$

ή ότι

$$\kappa_n \mu^2 - 2\kappa_n \mu_n \mu + \left(2\beta_n + \kappa_n \mu_n^2\right) \triangleq (\kappa_0 + n)\mu^2 - 2(\kappa_0 \mu_0 + n\overline{x})\mu$$
$$+ \left(2\beta_0 + \kappa_0 \mu_0^2 + n\overline{x}^2 + (n-1) S^2\right),$$

από όπου και παίρνουμε:

$$\kappa_n = \kappa_0 + n$$
$$\kappa_n \mu_n = \kappa_0 \mu_0 + n\overline{x} \Rightarrow \mu_n = \frac{\kappa_0 \mu_0 + n\overline{x}}{\kappa_0 + n}$$
$$2\beta_n + \kappa_n \mu_n^2 = 2\beta_0 + \kappa_0 \mu_0^2 + n\overline{x}^2 + (n-1) S^2 \Rightarrow \beta_n = \beta_0 + \frac{n-1}{2} S^2 + \frac{n\kappa_0 (\mu_0 - \overline{x})^2}{2(\kappa_0 + n)}.$$

Συγκεντρωτικά λοιπόν τα αποτελέσματα μας είναι:

$$\textit{prior} \qquad \pi(\mu, \tau) = Ng(\mu, \tau \mid \mu_0, \kappa_0, \alpha_0, \beta_0) = N\left(\mu \mid \mu_0, \frac{1}{\kappa_0 \tau}\right) Ga(\tau \mid \alpha_0, \beta_0)$$

$$\textit{likelihood} \quad \pi(x \mid \mu, \tau) \overset{\mu,\tau}{\propto} \tau^{n/2} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}\left[(n-1)s^2 + n(\mu - \overline{x})^2\right]\right\}$$

$$\textit{posterior} \quad \pi(\mu, \tau \mid x) = Ng\left(\mu, \tau \mid \alpha_0 + \frac{n}{2}, \beta_0 + \frac{n-1}{2} s^2 + \frac{n\kappa_0 (\mu_0 - \overline{x})^2}{2(n + \kappa_0)}, \frac{\mu_0 \kappa_0 + n\overline{x}}{\kappa_0 + n}, \kappa_0 + n\right)$$

$$= N\left(\mu \mid \frac{\mu_0 \kappa_0 + n\overline{x}}{\kappa_0 + n}, \frac{1}{(\kappa_0 + n)\tau}\right) Ga\left(\tau \mid \alpha_0 + \frac{n}{2}, \beta_0 + \frac{n-1}{2} s^2 + \frac{n\kappa_0 (\mu_0 - \overline{x})^2}{2(n + \kappa_0)}\right)$$

**Posterior marginals**: Είναι φανερό ότι εάν ολοκληρώσουμε την posterior $\pi(\mu, \tau \mid x)$ ως προς $\mu$ παίρνουμε

$$\pi(\tau \mid x) = \int_{\mathbb{R}^+} \pi(\mu, \tau \mid x) \, d\mu = Ga(\tau \mid \alpha_n, \beta_n)$$

από όπου και

$$\mathbb{E}\left(\tau|x\right)=\frac{\alpha_n}{\beta_n}=\frac{\alpha_0+\frac{n}{2}}{\beta_0+\frac{n-1}{2}S^2+\frac{n\kappa_0\left(\mu_0-\overline{x}\right)^2}{2\left(\kappa_0+n\right)}}\,.$$

Ολοκληρώνοντας την posterior $\pi\left(\mu,\tau|x\right)$ ως προς $\tau$ παίρνουμε την $\mu-$ περιθώρια posterior

$$\pi\left(\mu|x\right)=\int_{\tau>0}\pi\left(\mu,\tau|x\right)d\tau=\int_{\tau>0}N\left(\mu|\mu_n,\frac{1}{\kappa_n\tau}\right)Ga\left(\tau|\alpha_n,\beta_n\right)d\tau\,.$$

Γνωρίζουμε όμως από το characterization 1 της κατανομής student ότι:

$$\pi\left(u\right)=\int_{\varphi>0}N\left(u\,|\,\mu,\sigma^2\varphi^{-1}\right)Ga\left(\varphi\,|\,\frac{v}{2},\frac{v}{2}\right)d\varphi=St\left(u\,|\,\mu,\sigma^2,v\right)$$

θέτοντας $\varphi=s\tau$ στο ολοκλήρωμα για τη $\pi\left(\mu|x\right)$ παίρνουμε

$$\pi\left(\mu|x\right)=\int_{\varphi>0}N\left(\mu|\mu_n,\left(\frac{\kappa_n}{s}\varphi\right)^{-1}\right)Ga\left(\varphi|\alpha_n,\frac{\beta_n}{s}\right)d\varphi\,,$$

και θέτοντας την σταθερά $s=\frac{\beta_n}{\alpha_n}$ το $\pi\left(\mu|x\right)$ γίνεται

$$\pi\left(\mu|x\right)=\int_{\varphi>0}N\left(\mu|\mu_n,\left(\kappa_n\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{-1}\varphi^{-1}\right)Ga\left(\varphi|\alpha_n,\alpha_n\right)d\varphi=St\left(\mu\,|\,\mu_n,\left(\kappa_n\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{-1},2\alpha_n\right)$$

από όπου έχουμε

$$\mathbb{E}(\mu|x)=\mu_n=\frac{\kappa_0\mu_0+n\overline{x}}{\kappa_0+n},$$

$$\mathbb{V}(\mu|x)=\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n\kappa_n}\right)\left(\frac{2\alpha_n}{2\alpha_n-2}\right)=\frac{\beta_n}{\kappa_n(\alpha_n-1)}=\frac{\beta_0+\frac{n-1}{2}S^2+\frac{n\kappa_0(\mu_0-\overline{x})^2}{2(\kappa_0+n)}}{(\kappa_0+n)\left(\alpha_0+\frac{n}{2}-1\right)}$$

$$=\frac{\left(2\beta_0+(n-1)S^2\right)(\kappa_0+n)+n\kappa_0(\mu_0-\overline{x})^2}{(\kappa_0+n)^2(2\alpha_0+n-2)}.$$

**Θυμίζουμε ότι** η κατανομή student με $\nu$ βαθμούς ελευθερίας μέσο $\mu$ και διασπορά $\frac{\nu\sigma^2}{(\nu-2)}$ έχει πυκνότητα:

$$St(x|\mu,\sigma^2,\nu)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\nu\pi\sigma^2}}\left\{1+\frac{1}{\nu}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

ή ισοδύναμα, παραμετρικοποιώντας ως προς το precision

$$St(x|\mu,\lambda^{-1},\nu)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(\frac{\lambda}{\nu\pi}\right)^{1/2}\left\{1+\frac{\lambda}{\nu}(x-\mu)^2\right\}^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

<u>**Prior predictive**</u>: Για μια παρατήρηση $(x|\mu,\tau)\sim N(\mu,\tau^{-1})$ και prior $(\mu,\tau)\sim Ng(\mu_0,\kappa_0,\alpha_0,\beta_0)$ έχουμε

$$\pi(x)=\int_{\mu}\int_{\tau>0}N(x\,|\,\mu,\tau^{-1})Ng(\mu,\tau\,|\,\mu_0,\kappa_0,\alpha_0,\beta_0)\,d\tau\,d\mu$$

$$=\int_{\tau>0}\left(\int_{\mu}N(x\,|\,\mu,\tau^{-1})N\left(x\,|\,\mu_0,(\kappa_0\tau)^{-1}\right)d\mu\right)Ga(\tau\,|\,\alpha_0,\beta_0)\,d\tau$$

$$=\int_{\tau>0}N\left(x\,|\,\mu_0,\tau^{-1}+(\kappa_0\tau)^{-1}\right)Ga(\tau\,|\,\alpha_0,\beta_0)\,d\tau$$

$$= \int_{\tau>0} N\left(x \mid \mu_0, \left(1+\kappa_0^{-1}\right)\tau^{-1}\right) Ga\left(\tau \mid \alpha_0, \beta_0\right) d\tau \,.$$

Θέτοντας $\varphi = s\tau$ με $s = \dfrac{\beta_0}{\alpha_0}$ παίρνουμε

$$\pi\left(x\right) = \int_{\varphi>0} N\left(x \mid \mu_0, \frac{\beta_0}{\alpha_0}\left(1+\kappa_0^{-1}\right)\varphi^{-1}\right) Ga\left(\varphi \mid \alpha_0, \alpha_0\right) d\varphi$$

$$= St\left(x \mid \mu_0, \frac{\beta_0}{\alpha_0}\left(1+\kappa_0^{-1}\right), 2\alpha_0\right)$$

**Λέμε ότι το ζεύγος τ.μ.** $\left(x, y\right) \sim Pa_2\left(a, b_0, b_1\right)$ **ακολουθεί την Bilateral Pareto**, όταν:

$$Pa_2\left(x, y \mid a, b_0, b_1\right) \propto \left(y-x\right)^{-(a+2)} 1\left(x<b_0\right) 1\left(y>b_1\right)$$ με $a>0$, $b_0<b_1$.

Η σταθερά κανονικοποίησης $C$ είναι

$$C^{-1} = \iint_{\mathbb{R}^2} \left(y-x\right)^{-(a+2)} 1\left(x<b_0\right) 1\left(y>b_1\right) dy dx = \int_{x=-\infty}^{b_0} \int_{y=b_1}^{\infty} \left(y-x\right)^{-(a+2)} dy dx$$

$$= \frac{1}{a+1} \int_{x=-\infty}^{b_0} \left(b_1-x\right)^{-(a+1)} dx = \frac{\left(b_1-b_0\right)^{-a}}{a\left(a+1\right)} \Rightarrow C = a\left(a+1\right)\left(b_1-b_0\right)^{a}$$

Οι περιθώριες πυκνότητες είναι:

$$\pi\left(x\right) = a\left(a+1\right)\left(b_1-b_0\right)^{a} \int_{y=-\infty}^{\infty} \left(y-x\right)^{-(a+2)} 1\left(x<b_0\right) 1\left(y>b_1\right) dy$$

$$= a\left(a+1\right)\left(b_1-b_0\right)^a 1\left(x<b_0\right)\int_{y=b_1}^{\infty}\left(y-x\right)^{-(a+2)} dy = a\left(b_1-b_0\right)^a\left(b_1-x\right)^{-(a+1)} 1\left(x<b_0\right)$$

$$= a\left(b_1-b_0\right)^a\left(b_1-x\right)^{-(a+1)} 1\left(b_1-x>b_1-b_0\right) = Pa\left(b_1-x \mid a, b_1-b_0\right)$$

$$\pi\left(y\right) = a\left(a+1\right)\left(b_1-b_0\right)^a \int_{x=-\infty}^{\infty}\left(y-x\right)^{-(a+2)} 1\left(x<b_0\right) 1\left(y>b_1\right) dx$$

$$= a\left(a+1\right)\left(b_1-b_0\right)^a 1\left(y>b_1\right)\int_{x=-\infty}^{b_0}\left(y-x\right)^{-(a+2)} dx = a\left(b_1-b_0\right)^a\left(y-b_0\right)^{-(a+1)} 1\left(y>b_1\right)$$

$$= a\left(b_1-b_0\right)^a\left(y-b_0\right)^{-(a+1)} 1\left(y-b_0>b_1-b_0\right) = Pa\left(y-b_0 \mid a, b_1-b_0\right).$$

Εάν το μοντέλο δειγματοληψίας είναι

$$\left[x_i \mid \vartheta_1, \vartheta_2\right] \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}\left(\cdot \mid \vartheta_1, \vartheta_2\right),\ 1 \le i \le n,\ \vartheta_1 < \vartheta_2,$$

με $\vartheta = \left(\vartheta_1, \vartheta_2\right) \in \Theta = \left\{\left(\vartheta_1, \vartheta_2\right) \in \mathbb{R}^2 : \vartheta_1 < \vartheta_2\right\}$, τότε η δειγματοληπτική κατανομή δεν ανήκει στη EF, εφόσον ο χώρος καταστάσεων της τ.μ. $\left[x_i \mid \vartheta_1, \vartheta_2\right]$ εξαρτάται από της άγνωστες παραμέτρους $\vartheta_1$ και $\vartheta_2$.

Η πιθανοφάνεια θα είναι

$$\pi\left(x \mid \vartheta_1, \vartheta_2\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)^{-1} 1\left(\vartheta_1 \le x_i \le \vartheta_2\right)$$
$$= \left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)^{-n} 1\left(\vartheta_1 \le x_{(1)} < \cdots < x_{(n)} \le \vartheta_2\right)$$
$$= \left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)^{-n} 1\left(\vartheta_1 \le x_{(1)}\right) 1\left(\vartheta_2 \ge x_{(n)}\right) \overset{\vartheta_1, \vartheta_2}{\propto} Pa_2\left(\vartheta_1, \vartheta_2 \mid n-2, x_{(1)}, x_{(n)}\right)$$

Από όπου $t_{Suff}\left(x\right) = \left(t_1\left(x\right), t_2\left(x\right)\right) = \left(x_{(1)}, x_{(n)}\right)$.

Για τους MLE έχουμε:

$$\sup_{\left(\vartheta_1, \vartheta_2\right) \in \Theta} \pi\left(x \mid \vartheta\right) = \sup_{\substack{\left(\vartheta_1, \vartheta_2\right) \in \mathbb{R}^2 \\ \vartheta_1 < \vartheta_2}} \left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)^{-n} 1\left(\vartheta_1 \le x_{(1)}\right) 1\left(\vartheta_2 \ge x_{(n)}\right)$$

$$= \sup_{\left(\vartheta_1, \vartheta_2\right) \in \left(-\infty, x_{(1)}\right] \times \left[x_{(n)}, \infty\right)} \left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)^{-n} = \left\{\inf_{\left(\vartheta_1, \vartheta_2\right) \in \left(-\infty, x_{(1)}\right] \times \left[x_{(n)}, \infty\right)} \left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)\right\}^{-n}$$

$$= \left(x_{(n)} - x_{(1)}\right)^{-n} = \pi\left(x \mid x_{(1)}, x_{(n)}\right).$$

Οπότε $\hat{\vartheta}_{MLE} = \left(\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2\right)_{MLE} = \left(x_{(1)}, x_{(n)}\right)$

Εμφανώς η συζυγής prior είναι Bilateral Pareto, δηλαδή:

$$\pi_{NCP}\left(\vartheta_1, \vartheta_2\right) = Pa_2\left(\vartheta_1, \vartheta_2 \mid a_0, b_{00}, b_{10}\right) \propto \left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right)^{-(a_0+2)} 1\left(\vartheta_1 < b_{00}\right) 1\left(\vartheta_2 > b_{10}\right),$$

με υπερπαραμέτρους $a_0, b_{00}, b_{10}$. Η posterior τότε είναι

$$\pi\left(\vartheta_1, \vartheta_2 \mid x\right) \propto \left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right)^{-(a_0+2)} 1\left(\vartheta_1 < b_{00}\right) 1\left(\vartheta_2 > b_{10}\right) \times \left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right)^{-n} 1\left(\vartheta_1 < x_{(1)}\right) 1\left(\vartheta_2 > x_{(n)}\right)$$

$$= \left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right)^{-(a_0+n+2)} 1\left(\vartheta_1 < \min\left\{b_{00}, x_{(1)}\right\}\right) 1\left(\vartheta_2 > \max\left\{b_{10}, x_{(n)}\right\}\right)$$

$$= Pa_2\left(\vartheta_1, \vartheta_2 \mid \underbrace{a_0 + n}_{a_n}, \underbrace{\min\left\{b_{00}, x_{(1)}\right\}}_{b_{0n}}, \underbrace{\max\left\{b_{10}, x_{(n)}\right\}}_{b_{1n}}\right).$$

Για τις marginal posterior έχουμε:

$$\pi\left(\vartheta_1 \mid x\right) = Pa\left(b_{1n} - \vartheta_1 \mid a_n, b_{1n} - b_{0n}\right) = a_n \left(b_{1n} - b_{0n}\right)^{a_n} \left(b_{1n} - \vartheta_1\right)^{-(a_n+1)} 1\left(b_{1n} - \vartheta_1 > b_{1n} - b_{0n}\right)$$

$$= a_n \left(b_{1n} - b_{0n}\right)^{a_n} \left(b_{1n} - \vartheta_1\right)^{-(a_n+1)} 1\left(\vartheta_1 < b_{0n}\right),$$

$$\pi\left(\vartheta_2 \mid x\right) = Pa\left(\vartheta_2 - b_{0n} \mid a_n, b_{1n} - b_{0n}\right) = a_n \left(b_{1n} - b_{0n}\right)^{a_n} \left(\vartheta_2 - b_{0n}\right)^{-(a_n+1)} 1\left(\vartheta_2 > b_{1n}\right).$$

Εύρεση των εκτιμητών κατά Bayes, ως προς τετραγωνική συνάρτηση απώλειας.
Για τη $\mathbb{E}\left(\vartheta_1 \mid x\right)$ έχουμε:

$$\mathbb{E}\left(b_{1n} - \vartheta_1 \mid x\right) = \int_{\mathbb{R}} \left(b_{1n} - \vartheta_1\right) \pi\left(\vartheta_1 \mid x\right) d\vartheta_1$$

$$= a_n \left(b_{1n} - b_{0n}\right)^{a_n} \int_{\mathbb{R}} \left(b_{1n} - \vartheta_1\right)\left(b_{1n} - \vartheta_1\right)^{-(a_n+1)} 1\left(\vartheta_1 < b_{0n}\right) d\vartheta_1$$

$$= a_n \left(b_{1n} - b_{0n}\right)^{a_n} \int_{\vartheta_1=-\infty}^{b_{0n}} \left(b_{1n} - \vartheta_1\right)^{-a_n} d\vartheta_1 = \frac{a_n \left(b_{1n} - b_{0n}\right)}{a_n - 1},$$

ή ότι

$$b_{1n} - \mathbb{E}\left(\vartheta_1 \mid x\right) = \frac{a_n \left(b_{1n} - b_{0n}\right)}{a_n - 1} \Leftrightarrow \mathbb{E}\left(\vartheta_1 \mid x\right) = \frac{a_n b_{0n} - b_{1n}}{a_n - 1}.$$

Για τη $\mathbb{E}\left(\vartheta_2 \mid x\right)$ έχουμε:

$$\mathbb{E}\left(\vartheta_2 - b_{0n} \mid x\right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\vartheta_2 - b_{0n}\right) \pi\left(\vartheta_2 \mid x\right) d\vartheta_2$$

$$= a_n \left(b_{1n} - b_{0n}\right)^{a_n} \int_{\mathbb{R}} \left(\vartheta_2 - b_{0n}\right)\left(\vartheta_2 - b_{0n}\right)^{-(a_n+1)} 1\left(\vartheta_2 > b_{1n}\right) d\vartheta_2$$

$$= a_n \left(b_{1n} - b_{0n}\right)^{a_n} \int_{\vartheta_2=b_{1n}}^{\infty} \left(\vartheta_2 - b_{0n}\right)^{-a_n} d\vartheta_2 = \frac{a_n \left(b_{1n} - b_{0n}\right)}{a_n - 1},$$

ή ότι

$$\mathbb{E}\left(\vartheta_2 \mid x\right) - b_{0n} = \frac{a_n \left(b_{1n} - b_{0n}\right)}{a_n - 1} \Leftrightarrow \mathbb{E}\left(\vartheta_1 \mid x\right) = \frac{a_n b_{1n} - b_{0n}}{a_n - 1}.$$

**Για gamma μοντέλο δειγματοληψίας** με άγνωστα shape $\vartheta_1$ και rate $\vartheta_2$, δηλαδή $\vartheta = \left(\vartheta_1, \vartheta_2\right) = \left(\alpha, \beta\right)$, έχουμε:

$$\pi\left(x_i \mid \alpha, \beta\right) = Ga\left(x_i \mid \alpha, \beta\right) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\beta x_i} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp\left\{\left(\alpha - 1\right)\log\left(x_i\right) - \beta x_i\right\}$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp\left\{\left(\alpha - 1, -\beta\right) \cdot \begin{pmatrix} \log\left(x_i\right) \\ x_i \end{pmatrix}\right\},$$

με EF παραμέτρους

$$h(x_i)=1,\ g(\alpha,\beta)=g_1(\alpha,\beta)g_2(\alpha,\beta),$$

$$g_1(\alpha,\beta)=\beta^{\alpha},\ g_2(\alpha,\beta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$$

$$c(\alpha,\beta)^T=(\alpha-1,-\beta),\ t(x_i)^T=(\log(x_i),x_i).$$

Η πιθανοφάνεια είναι

$$\pi(x|\alpha,\beta)=\frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha)^n}\exp\left\{(\alpha-1,-\beta)\cdot\begin{pmatrix}t_1(x)\\ t_2(x)\end{pmatrix}\right\},$$

με $t_1(x)=\sum_{i=1}^n \log(x_i)$ και $t_2(x)=\sum_{i=1}^n x_i$ .

Η συζυγείς a-priori κατανομή με υπερπαραμέτρους $\delta^T=(\delta_1,\delta_2)$ και $b^T=(b_1,b_2)$ θα είναι:

$$\pi_{NCP}(\alpha,\beta)=\pi_{NCP}(\alpha,\beta\mid\delta,b)\propto\frac{\beta^{\alpha\delta_1}}{\Gamma(\alpha)^{\delta_2}}\exp\left\{(\alpha-1,-\beta)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{\beta^{\alpha\delta_1}}{\Gamma(\alpha)^{\delta_2}}\exp\{(\alpha-1)b_1-\beta b_2\}\propto\frac{\beta^{\alpha\delta_1}}{\Gamma(\alpha)^{\delta_2}}\exp\{\alpha b_1-\beta b_2\}$$

Παρατηρούμε ότι τα full conditionals της prior δίνονται από τις

$$\pi_{NCP}(\beta\mid\alpha)\propto\beta^{\alpha\delta_1}\exp\{-\beta b_2\}\propto Ga(\beta\mid\alpha\delta_1+1,b_2)$$

$$\pi_{NCP}(\alpha\mid\beta)\propto\frac{\beta^{\alpha\delta_1}}{\Gamma(\alpha)^{\delta_2}}\exp\{(\alpha-1)b_1\}=\frac{\rho^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)^{\delta_2}}e^{\alpha b_1},\ \rho=\beta^{\delta_1}$$ (nonstandard κατανομή),

ενώ η $\alpha-$περιθώρια της $\pi_{NCP}\left(\alpha,\beta\right)$ πυκνότητας είναι

$$\pi_{NCP}\left(\alpha\right) \propto \frac{e^{\alpha b_1}}{\Gamma\left(\alpha\right)^{\delta_2}} \int\limits_{\beta>0} \beta^{\alpha\delta_1} e^{-\beta b_2} d\beta = \frac{e^{\alpha b_1}}{\Gamma\left(\alpha\right)^{\delta_2}} \frac{\Gamma\left(\alpha\delta_1+1\right)}{b_2^{\alpha\delta_1+1}}$$

$$\propto \frac{e^{\alpha b_1}}{\Gamma\left(\alpha\right)^{\delta_2}} \frac{\Gamma\left(\alpha\delta_1+1\right)}{b_2^{\alpha\delta_1}} = \frac{\xi^{\alpha}\,\Gamma\left(\alpha\delta_1+1\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)^{\delta_2}}, \text{ όπου } \xi = \frac{e^{b_1}}{b_2^{\delta_1}}.$$

Για την posterior έχουμε

$$\pi\left(\alpha,\beta|x\right) \propto \frac{\beta^{\alpha\delta_1}}{\Gamma\left(\alpha\right)^{\delta_2}} \exp\left\{\left(\alpha-1,-\beta\right)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right\} \times \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)^{n}} \exp\left\{\left(\alpha-1,-\beta\right)\cdot\begin{pmatrix} t_1\left(x\right) \\ t_2\left(x\right) \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{\beta^{\alpha\left(\delta_1+n\right)}}{\Gamma\left(\alpha\right)^{\delta_2+n}} \exp\left\{\left(\alpha-1,-\beta\right)\cdot\begin{pmatrix} b_1+t_1\left(x\right) \\ b_2+t_2\left(x\right) \end{pmatrix}\right\} \propto \pi_{NCP}\left(\alpha,\beta\,|\,\delta+n\mathfrak{e}, b+t\left(x\right)\right), \mathfrak{e}^T = \left(1,1\right)$$