

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

3.0 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι έννοιες της τυχαίας μεταβλητής, της συνάρτησης κατανομής, της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης πυκνότητας. Μελετώνται οι σημαντικότερες διακριτές και συνεχείς κατανομές. Εισάγεται η έννοια της ροπής μίας τυχαίας μεταβλητής μαζί με αρκετά παραδείγματα, προτάσεις και εφαρμογές. Παρουσιάζονται οι σημαντικότερες ανισότητες ροπών και πιθανοτήτων και μελετώνται συγκεκριμένες ποσότητες που περιγράφουν συνοπτικά μία τυχαία μεταβλητή όπως η μέση τιμή, η διασπορά, το μέτρο ασυμμετρίας και το μέτρο κύρτωσης.

3.1 Τυχαίες μεταβλητές

Κατά τη μελέτη ενός πειράματος τύχης μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε δειγματικό σημείο έναν αριθμό χρησιμοποιώντας έναν προκαθορισμένο κανόνα αντιστοίχισης. Υπάρχει δηλαδή η δυνατότητα ορισμού μιας συνάρτησης X η οποία σε κάθε σημείο ω του δειγματικού χώρου Ω να αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $X(\omega)$. Μία τέτοια συνάρτηση καλείται **τυχαία μεταβλητή** (random variable). Ο συμβολισμός $X(\omega) = x$ σημαίνει ότι όταν το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης είναι το $\omega \in \Omega$, τότε η τιμή που θα πάρει η τυχαία μεταβλητή X είναι ίση με x . Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός (Τυχαία μεταβλητή). Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Μία πραγματική συνάρτηση $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται **τυχαία μεταβλητή (του πειράματος)** αν για κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ το σύνολο $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ είναι ενδεχόμενο του Ω . Η πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου θα γράφεται ως $P(X \in I)$.

Μία τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστοιχεί το δειγματικό χώρο Ω σε ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό είναι το $\{x \in \mathbb{R} : X(\omega) = x \text{ για κάποιο } \omega \in \Omega\}$ και καλείται **πεδίο τιμών ή σύνολο τιμών** (set of values) της τυχαίας μεταβλητής X . Συμβολίζεται συνήθως με R_X (ή με S_X).

Παράδειγμα 1 (α) Έστω το τυχαίο πείραμα της ρίψης δύο ζαριών. Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, \dots, 6\}$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $X(i, j) = i + j$. Η X αναπαριστά το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών.

(β) Έστω το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος n φορές. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $X :=$ αριθμός των εμφανιζομένων κεφαλών στις n ρίψεις. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αποτελείται από $n - \text{άδες}$ με ενδείξεις K για τις κεφαλές και Γ για τα γράμματα. Αν ένα στοιχείο ω του δειγματικού χώρου είναι μία $n - \text{άδα}$ με πέντε ενδείξεις κεφαλής τότε $X(\omega) = 5$.

(γ) Έστω η τυχαία μεταβλητή $X :=$ χρόνος ζωής ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα. Το πεδίο τιμών της X είναι το σύνολο $R_X = [0, \infty)$.

(δ) Έστω η τυχαία μεταβλητή $X :=$ ενδιάμεσος χρόνος άφιξης τρένων σε ένα συγκεκριμένο σταθμό. Αν ο χρόνος μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων των τρένων δεν ξεπερνάει τα πέντε λεπτά, τότε η πιθανότητα να περιμένουμε περισσότερο από δύο λεπτά αν φτάσουμε στο σταθμό τη στιγμή που φεύγει ένα τρένο είναι ίση με $P(2 < X \leq 5)$. ■

Παρατήρηση. Η $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή, αν και μόνο αν για κάθε πραγματικό αριθμό x το σύνολο $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$ δηλαδή είναι ενδεχόμενο ως στοιχείο της συλλογής $\mathfrak{F}$ που είναι ένα σ -σώμα ενδεχομένων. Αν B είναι ένα υποσύνολο του $\mathfrak{R}$ τότε η αντίστροφη εικόνα του συνόλου B , υπό την τυχαία μεταβλητή X συμβολίζεται ως $X^{-1}(B)$ και ορίζεται ως $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$. Ισοδύναμος και απλούστερος συμβολισμός της αντίστροφης εικόνας είναι ο $(X \in B)$. Το σύνολο B μπορεί να έχει τη μορφή αριθμήσιμων ενώσεων ή τομών ή συμπληρωμάτων ημι-ευθειών της μορφής $(-\infty, x]$, $x \in \mathfrak{R}$. Για παράδειγμα, το σύνολο B μπορεί να είναι το σύνολο $B = (-\infty, 5) \cap (-\infty, 2)^c = [2, 5)$. ■

Παράδειγμα 2 Σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση, αν $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή, θα ισχύει, για παράδειγμα, ότι:

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\}) \in \mathfrak{F}.$$

$$(X \leq x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathfrak{F}.$$

$$(X < x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} = X^{-1}((-\infty, x)) \in \mathfrak{F}.$$

$$(X \geq x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\} = X^{-1}([x, \infty)) \in \mathfrak{F}.$$

$$(X > x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\} = X^{-1}((x, \infty)) \in \mathfrak{F}.$$

$$(x < X \leq y) = \{\omega \in \Omega \mid x < X(\omega) \leq y\} = X^{-1}((x, y]) \in \mathfrak{F}. \blacksquare$$

3.2 Η συνάρτηση κατανομής και οι ιδιότητές της

Ο υπολογισμός πιθανοτήτων που σχετίζονται με μία τυχαία μεταβλητή X είναι εφικτός αν βρεθεί μία έκφραση για τις πιθανότητες $P(X \leq x)$ για όλα τα $x \in \mathfrak{R}$. Η **συνάρτηση κατανομής** (distribution function) $F(x) = P(X \leq x)$ μας δίνει όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε για την τυχαία μεταβλητή X . Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός Έστω $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ μία τυχαία μεταβλητή. Η **συνάρτηση κατανομής (σ.κ.)** F_X της τυχαίας μεταβλητής X είναι η συνάρτηση $F_X : \mathfrak{R} \rightarrow [0, 1]$ με τύπο $F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$, $x \in \mathfrak{R}$.

Μία συνάρτηση κατανομής έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

(α) Η συνάρτηση κατανομής F_X μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι αύξουσα (μη φθίνουσα).

Έστω $x, y \in \mathfrak{R}$ τέτοια ώστε $x < y$. Θα πρέπει να ισχύει ότι $F_X(x) \leq F_X(y)$.

Όμως, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq y\}$

$$P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \leq P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq y\} \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$$

$\Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$. Άρα η συνάρτηση F_X είναι αύξουσα (μη φθίνουσα).

(β) $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$. Έστω μία αύξουσα ακολουθία $\{x_n\}_{n \geq 1}$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = 1$. Αυτό προκύπτει από το Θεώρημα Συνέχειας διότι η ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n\}_{n \geq 1}$ με

$$A_n = \{X \leq x_n\} \text{ είναι αύξουσα με } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \{X < \infty\}.$$

$$\text{Επομένως, } \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = P(X < \infty) = P(\Omega) = 1.$$

(γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της ιδιότητας (β).

(δ) Η συνάρτηση κατανομής F_X είναι δεξιά συνεχής. Η Πρόταση (δ) μπορεί εναλλακτικά να διατυπωθεί ως εξής: Για κάθε φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{x_n\}_{n \geq 1}$, με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = F_X(x)$.

Αφού η ακολουθία $\{x_n\}_{n \geq 1}$ είναι φθίνουσα, η αντίστοιχη ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n\}_{n \geq 1}$ με $A_n = \{X \leq x_n\}$ θα

είναι φθίνουσα. Επίσης ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \{X \leq x\}$, επομένως χρησιμοποιώντας πάλι το

Θεώρημα Συνέχειας προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = P(X \leq x) = F_X(x)$. ■

Παράδειγμα 3 Να εκφραστούν οι πιθανότητες $P(x < X \leq y)$ και $P(X > x)$ συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής F_X για μία τυχαία μεταβλητή X .

Λύση. Είναι $(X \leq y) = (x < X \leq y) \cup (X \leq x)$ και τα ενδεχόμενα $(x < X \leq y)$ και $(X \leq x)$ είναι ξένα μεταξύ τους. Επομένως, $P(X \leq y) = P(x < X \leq y) + P(X \leq x)$

Συνεπώς, $P(x < X \leq y) = P(X \leq y) - P(X \leq x) = F_X(y) - F_X(x)$.

Είναι $P(X > x) = 1 - P[(X > x)^c] = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$. ■

3.3 Διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Αν το πεδίο τιμών R_X μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι πεπερασμένο ή το πολύ απείρως αριθμήσιμο τότε η X καλείται **διακριτή (ή απαριθμητή)** (discrete). Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο τιμών της X έχει τη μορφή $S_X = R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ ή τη μορφή $S_X = R_X = \{x_1, \dots, x_N\}$. Το σύνολο S_X καλείται **φορέας** της τυχαίας μεταβλητής X . Σε κάθε διακριτή τυχαία μεταβλητή X , μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μία πραγματική συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ με τύπο $f(x_i) = P(X = x_i)$, $x_i \in S_X$ η οποία καλείται **συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.)** (probability function) ή **συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.)** (probability mass function) της X .

Για παράδειγμα, κατά τη ρίψη ενός νομίσματος n φορές, η τυχαία μεταβλητή X που μετράει τον αριθμό των κεφαλών είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένο σύνολο τιμών $R_X = \{0, 1, \dots, n\}$.

Μία συνάρτηση πιθανότητας ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

(α) $f(x_i) \geq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots$

(β) $\sum_{x_i \in S_X} f(x_i) = 1$.

Επιπλέον, για μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X ισχύει ότι

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left[\bigcup_{x_k \leq x} \{X = x_k\}\right] = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k) = \sum_{x_k \leq x} f(x_k).$$

Η συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής παριστάνεται γραφικά με ένα σύνολο κατακόρυφων γραμμών που συνδέουν τα σημεία $(x_i, 0)$ με τα σημεία $(x_i, f(x_i))$ για $i = 1, 2, \dots$. Στο βιβλίο του Κούτρα [4], σελ. 203 και σελ. 206-209, γίνεται σχετική συζήτηση για την γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας αλλά και τη σχέση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων πιθανότητας και κατανομής μίας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X .

Παράδειγμα 4 Ο αριθμός των αυτοκινήτων που πουλάει μία έκθεση σε μία εβδομάδα είναι τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο: $f(x) = cx$, $x = 1, 2, 3, 4, 5$ και $f(x) = c(10 - x)$, $x = 6, 7, 8, 9$. (α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c . (β) Ποια είναι η πιθανότητα να πουληθούν σε μία εβδομάδα (i) λιγότερα από 4 αυτοκίνητα; (ii) περισσότερα από 5 αυτοκίνητα γνωρίζοντας ότι έχουν πουληθεί τουλάχιστον 3;

Λύση. (α) Είναι $R_X = \{1, \dots, 9\}$, οπότε θα ισχύει ότι $\sum_{x=1}^9 f(x) = 1$ ή ισοδύναμα $25c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{25}$.

(β) Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων έχουμε:

$$(i) P(X < 4) = \sum_{x=1}^3 P(X = x) = \frac{1}{25}(1 + 2 + 3) = \frac{6}{25}.$$

$$(ii) P(X > 5 | X \geq 3) = \frac{P(X > 5, X \geq 3)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X > 5)}{P(X \geq 3)} = \frac{f(6) + f(7) + f(8) + f(9)}{1 - f(1) - f(2)} = \frac{\frac{10}{25}}{1 - \frac{3}{25}} = \frac{5}{11}. \blacksquare$$

Παράδειγμα 5 Οι ημερήσιες παραγγελίες (σε 100-άδες χιλιάδες τεμάχια) που δέχεται ένα εργοστάσιο το οποίο κατασκευάζει CD περιγράφονται από μία τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής $F(t) = 0$, $t < 0$, $F(t) = at^2$, $0 \leq t < \frac{1}{2}$, $F(t) = at - t^2$, $\frac{1}{2} \leq t < 1$, $F(t) = 1$, $t \geq 1$, όπου a είναι μία πραγματική σταθερά. Υποθέτουμε ότι οι ημερήσιες παραγγελίες είναι λιγότερες από 100000 τεμάχια.

(α) Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς a .

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε μία ημέρα να παραγγελθούν περισσότερα από 50000 τεμάχια.

(γ) Αν κάποια ημέρα οι παραγγελίες έχουν ξεπεράσει τα 25000 τεμάχια, ποια είναι η πιθανότητα να υπερβούν και τα 75000 τεμάχια;

Λύση. (α) Υποθέτουμε ότι $P(X < 1) = 1$. Επομένως, $1 = P(X < 1) = F(1_-) = a - 1 \Rightarrow a = 2$.

$$(β) P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P\left(X > \frac{3}{4} | X > \frac{1}{4}\right) = \frac{P\left(X > \frac{3}{4}, X > \frac{1}{4}\right)}{P\left(X > \frac{1}{4}\right)} = \frac{P\left(X > \frac{3}{4}\right)}{P\left(X > \frac{1}{4}\right)} = \frac{1 - F\left(\frac{3}{4}\right)}{1 - F\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1 - 2\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{8}. \blacksquare$$

Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται **συνεχής** (continuous), αν υπάρχει μία μη-αρνητική συνάρτηση $f_X : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο B του συνόλου $\mathcal{R}$ των πραγματικών αριθμών, το οποίο

μπορεί να γραφεί ως ένωση ενός πεπερασμένου ή απείρως αριθμήσιμου πλήθους διαστημάτων, ισχύει ότι $P(X \in B) = \int_B f_X(t)dt, t \in \mathcal{R}$. Η συνάρτηση f_X καλείται **συνάρτηση πυκνότητας (σ.π.)** (density function) της

$$X. \text{ Αν } B = (-\infty, \infty), \text{ τότε } P(X \in (-\infty, \infty)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1.$$

$$\text{Αν } B = [a, b], \text{ τότε } P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t)dt. \text{ Αν } a = b, P(X = a) = \int_a^a f_X(t)dt = 0. \text{ Επομένως,}$$

η πιθανότητα η X να πάρει οποιαδήποτε συγκεκριμένη τιμή είναι μηδέν. Η τιμή $f_X(a)$ δεν εκφράζει την πιθανότητα $P(X = a)$ όπως στις διακριτές κατανομές αλλά δίνει το **πόσο πιθανό** είναι να βρίσκεται η τυχαία μεταβλητή X **πολύ κοντά στην τιμή a** . Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή $f_X(a)$ τόσο περισσότερο πιθανό είναι να πάρει η τυχαία μεταβλητή X τιμές κοντά στο a . Στο βιβλίο του Κούτρα [4], σελ. 339-340, γίνεται μία σχετική συζήτηση για το θέμα αυτό από το οποίο, ως συνέπεια, έπεται ότι, σε αντίθεση με τη συνάρτηση πιθανότητας η οποία παίρνει **πάντοτε τιμές μικρότερες ή ίσες της μονάδας**, για τη συνάρτηση πυκνότητας **δεν είναι απαραίτητο κάτι τέτοιο** αφού η τελευταία δεν εκφράζει κάποια πιθανότητα. Επιπλέον, ισχύει ότι

$$F_X(x) = P(X < x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt. \text{ Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας } f_X \text{ είναι μία συνεχής}$$

συνάρτηση τότε, όπως γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό, αν παραγωγίσουμε ως προς x , θα έχουμε $F'_X(x) = f_X(x), x \in \mathcal{R}$. Ακόμη και αν η f_X δεν είναι συνεχής παντού η τελευταία σχέση θα ισχύει για κάθε x στο οποίο η f_X είναι συνεχής.

Μία συνάρτηση πυκνότητας χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες δύο ιδιότητες

$$(\alpha) f_X(x) \geq 0, x \in \mathcal{R}. (\beta) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1.$$

Παράδειγμα 6 Το σφάλμα X που γίνεται κατά τη μέτρηση με τη χρήση ενός συγκεκριμένου οργάνου είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = c(4 - x^2), -2 \leq x \leq 2$ και $f(x) = 0$, διαφορετικά, όπου c είναι μία πραγματική σταθερά. (α) Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς c . (β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής F_X της τυχαίας μεταβλητής X . (γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το σφάλμα μιας μέτρησης να είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερο του 1.

$$\text{Λύση. (α) Θα πρέπει } c \geq 0 \text{ και } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-2}^2 c(4 - x^2)dx = 1 \Rightarrow \frac{32}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{32}.$$

(β) Η συνάρτηση κατανομής της X δίνεται από τον τύπο $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \int_{-2}^x \frac{3}{32}(4-t^2)dt, & -2 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

$$\text{Είναι } \int_{-2}^x \frac{3}{32}(4-t^2)dt = \frac{12}{32}[t]_{-2}^x - \frac{3}{32}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^x = \frac{16+12x-x^3}{32}.$$

$$\text{Αρα, } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{16+12x-x^3}{32}, & -2 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$(\gamma) P(|X| < 1) = P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{11}{16} = 68.75\%. \blacksquare$$

3.4 Παραδείγματα διακριτών τυχαίων μεταβλητών

(α) Ομοιόμορφη διακριτή τυχαία μεταβλητή. Έστω $\Omega = \{x_1, \dots, x_N\}$ ένας πεπερασμένος δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, όπου N φυσικός αριθμός. Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως εξής $f_x(x_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{N}$, για κάθε $i = 1, \dots, N$. Λέμε ότι η X είναι μία **ομοιόμορφη διακριτή τυχαία μεταβλητή** (discrete uniform random variable). Για παράδειγμα, θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο τιμών της X είναι το διακριτό σύνολο $\{1, \dots, 6\}$ και ισχύει ότι $P(X = i) = \frac{1}{6}, i \in \{1, \dots, 6\}$.

(β) Διωνυμική τυχαία μεταβλητή. Θεωρούμε ένα πείραμα τύχης το οποίο έχει δύο μόνο δυνατά αποτελέσματα το ένα εκ των οποίων μπορεί να χαρακτηριστεί ως «επιτυχία» και το άλλο μπορεί να χαρακτηριστεί ως «αποτυχία». Κάθε εκτέλεση ενός πειράματος τύχης με μόνο δύο δυνατά αποτελέσματα καλείται **δοκιμή**. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα n φορές. Θεωρούμε ότι η πιθανότητα της «επιτυχίας» είναι ίση με p και η πιθανότητα της «αποτυχίας» είναι ίση με $q = 1 - p$. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των επιτυχιών στις n ανεξάρτητες επαναλήψεις του πειράματος. Τότε λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι μία **διωνυμική τυχαία μεταβλητή** (binomial random variable). Γράφουμε $X \sim \text{Bin}(n, p)$ και λέμε ότι η X ακολουθεί τη **διωνυμική κατανομή**. Οι ποσότητες n, p καλούνται **παράμετροι** της διωνυμικής κατανομής. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}$, όπου το σύνολο $\{0, 1\}$ εμφανίζεται n φορές, η ένδειξη 0 συμβολίζει την «αποτυχία» και η ένδειξη 1 συμβολίζει την «επιτυχία». Το πεδίο τιμών της

τυχαίας μεταβλητής X είναι το διακριτό σύνολο $\{0, \dots, n\}$. Η συνάρτηση πιθανότητας μιας διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής $X \sim B(n, p)$ δίνεται από τον τύπο $P(X = x) = f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, $x = 0, \dots, n$, $q = 1 - p$. (*).

Θα δούμε πως προκύπτει η σχέση (*). Έστω ότι οι x επιτυχίες ενός πειράματος τύχης εμφανίστηκαν στις πρώτες x επαναλήψεις του και στις τελευταίες $n - x$ επαναλήψεις του πειράματος έχουμε μόνο αποτυχίες. Επιπλέον οι n επαναλήψεις είναι ανεξάρτητες. Άρα,

$$P(X = x) = P(x \text{ επιτυχίες, } n - x \text{ αποτυχίες}) = p \cdots p \cdot q \cdots q = p^x q^{n-x}.$$

Επειδή υπάρχουν $\binom{n}{x}$ τρόποι σύμφωνα με τους οποίους οι x επιτυχίες μπορούν να πραγματοποιηθούν σε n ανεξάρτητες επαναλήψεις του πειράματος, προκύπτει ότι $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, όπως θέλαμε να δείξουμε.

Η f_X είναι πράγματι μία συνάρτηση πιθανότητας διότι $\sum_{x=0}^n f_X(x) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p+q)^n = 1^n = 1$ και προφανώς $f_X(x) \geq 0$, $x = 0, \dots, n$. Αν $n=1$ η τυχαία μεταβλητή X καλείται τυχαία μεταβλητή **Bernoulli** (Bernoulli random variable) και γράφουμε $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Παράδειγμα 7 Πόσα παιδιά πρέπει να αποκτήσει μία οικογένεια ώστε να έχει με πιθανότητα μεγαλύτερη ή ίση του 0.9 τουλάχιστον ένα αγόρι και τουλάχιστον ένα κορίτσι; Υποθέτουμε ότι σε κάθε γέννηση είναι εξίσου πιθανό να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι.

Λύση. Έστω n ο ζητούμενος αριθμός παιδιών που πρέπει να αποκτήσει η οικογένεια. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των αγοριών που έχει αποκτήσει η οικογένεια στο σύνολο των n παιδιών και Y η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των κοριτσιών που έχει αποκτήσει η οικογένεια στο σύνολο των n παιδιών. Ισχύει ότι $X \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ και $Y \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Επιπλέον $X + Y = n$.

Είναι $P(X \geq 1, Y \geq 1) = P(X \geq 1, n - X \geq 1) = P(1 \leq X \leq n - 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = n)$

$$= 1 - \binom{n}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \binom{n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}. \text{ Πρέπει } 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \geq 0.9 \Rightarrow n \geq 1 - \frac{\ln 0.1}{\ln 2} \approx 4.32.$$

Επομένως, η οικογένεια θα πρέπει να έχει τουλάχιστον πέντε παιδιά. ■

Παράδειγμα 8 Έστω ότι το 25% από εκείνους που εξετάζονται για την απόκτηση διπλώματος οδηγού αυτοκινήτου αποτυγχάνουν. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X δίνει τον αριθμό των αποτυχόντων ανάμεσα σε είκοσι πέντε εξεταζόμενους. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες (α) $P(X \geq 1)$ (β) $P(X \leq 20)$ (γ) $P(5 < X \leq 20)$.

Λύση. Ισχύει ότι $X \sim B(25, 0.25)$.

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{25}{0} (0.25)^0 (1 - 0.25)^{25-0} = 1 - (0.75)^{25} \\ &= 1 - 0.0008 = 0.9992. \end{aligned}$$

$$(\beta) \quad P(X \leq 20) = \sum_{x=0}^{20} \binom{25}{x} (0.25)^x (0.75)^{25-x} \approx 1.$$

$$(\gamma) \quad P(5 < X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X < 5) = P(X \leq 20) - P(X \leq 4) \approx 1 - 0.2137 = 0.7863. \blacksquare$$

Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων που σχετίζονται με τη διωνυμική κατανομή χρησιμοποιούμε κατάλληλους πίνακες (για παράδειγμα, βλέπε βιβλίο Γ. Ρούσσα [1], Θεωρία Πιθανοτήτων, σελ. 280-288).

(γ) Τυχαία μεταβλητή Poisson. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των πελατών που φθάνουν σε ένα ταμείο εντός ορισμένου χρονικού διαστήματος ή τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μία περιοχή κατά τη διάρκεια μιας ημέρας ή τον αριθμό των σωματιδίων που εκπέμπονται από μία ραδιενεργό πηγή εντός δοθέντος χρονικού διαστήματος. Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα η τυχαία μεταβλητή X λαμβάνει τιμές $x = 0, 1, \dots$ και η πιθανότητα $P(X = x)$ μπορεί να προσεγγισθεί ικανοποιητικά από μία κατανομή πιθανότητας που καλείται **κατανομή Poisson** (Poisson distribution). Η συνάρτηση πιθανότητας της X ορίζεται ως εξής: $f_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \dots$, $\lambda > 0$.

Η ποσότητα λ καλείται **παράμετρος** της κατανομής Poisson και η παραπάνω συνάρτηση είναι πράγματι μία σ.π. διότι $\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1$. Αν μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$, γράφουμε $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Ισχύει το ακόλουθο οριακό θεώρημα σύμφωνα με το οποίο η κατανομή Poisson προσεγγίζεται από τη διωνυμική κατανομή.

Θεώρημα 3.1 (Προσέγγιση της κατανομής Poisson από τη διωνυμική κατανομή). Έστω μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n \geq 1}$ που ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p_n . Έστω ότι καθώς $n \rightarrow \infty$, $p_n \rightarrow 0$ και $\lambda_n = np_n \rightarrow \lambda$, για κάποιο $\lambda > 0$.

Τότε $P(X_n = x) = \binom{n}{x} p_n^x (1 - p_n)^{n-x} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$, καθώς $n \rightarrow \infty$, για κάθε σταθερό $x = 0, 1, \dots$.

Απόδειξη. Έχουμε $P(X_n = x) = \binom{n}{x} p_n^x (1 - p_n)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-x}$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-x} = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x} \frac{\lambda_n^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-x}$$

$$= 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \frac{\lambda_n^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-x} \rightarrow 1 \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty, \text{ διότι } \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty. \blacksquare$$

Παράδειγμα 9 Μία πόλη έχει χίλια σπίτια. Κατά τη διάρκεια ενός χρόνου η πιθανότητα να παραβιαστεί οποιοδήποτε από αυτά είναι 0.001. Να υπολογιστεί η πιθανότητα κατά τη διάρκεια ενός έτους να γίνουν τουλάχιστον δύο διαρρήξεις.

Λύση. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των διαρρήξεων κατά τη διάρκεια ενός έτους. Ισχύει ότι $X \sim B(1000, 0.001)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1, έχουμε

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}. \blacksquare$$

Παράδειγμα 10 Έστω ότι ο αριθμός των θανάτων σε ένα νοσοκομείο των Αθηνών σε ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Αν η πιθανότητα να συμβεί το πολύ ένας θάνατος σε ένα μήνα είναι τετραπλάσια της πιθανότητας να συμβούν δύο ακριβώς θάνατοι σε ένα μήνα να υπολογιστεί η πιθανότητα (α) να μη συμβεί θάνατος σε ένα μήνα (β) να συμβούν το πολύ δύο θάνατοι σε ένα μήνα.

Λύση. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X αναπαριστά τον αριθμό των θανάτων σε ένα μήνα. Τότε $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι

$$P(X \leq 1) = 4P(X = 2) \text{ δηλαδή } e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \lambda = 4e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} \Rightarrow 1 + \lambda = 2\lambda^2. \text{ Έπεται ότι } \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{2} \text{ η οποία είναι μία μη αποδεκτή λύση. Άρα } X \sim \text{Poisson}(1).$$

$$(\alpha) P(X = 0) = e^{-1} \cong 0.37. (\beta) P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^2 e^{-1} \frac{1^x}{x!} = 2.5e^{-1} \cong 0.92. \blacksquare$$

(δ) Γεωμετρική τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι η πιθανότητα επιτυχίας ενός πειράματος τύχης με δύο μόνο δυνατά αποτελέσματα («επιτυχία», «αποτυχία») είναι ίση με $p \neq 0$. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας. Το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι το διακριτό σύνολο $\{1, 2, \dots\}$. Λέμε ότι η X ακολουθεί τη **Γεωμετρική κατανομή** (Geometric distribution) με παράμετρο p και γράφουμε $X \sim G(p)$. Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$f_X(x) = P(X = x) = P(\text{αποτυχία στη } 1^{\text{η}} \text{ δοκιμή}, \dots, \text{αποτυχία στη } x-1\text{-οστή δοκιμή, επιτυχία στη } x\text{-οστή δοκιμή}) = (1-p) \cdots (1-p) \cdot p = (1-p)^{x-1} p, \quad x \in \{1, \dots\}.$$

Η f_X είναι πράγματι μία σ.π. διότι $\sum_{x=1}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} p = p \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} = p \frac{1}{1-(1-p)} = p \frac{1}{p} = 1$.

Για τη συνάρτηση κατανομής της $G(p)$ έχουμε $F(x) = 0, x < 1$ και $F(x) = \sum_{t=1}^x f(t), x \geq 1$.

Όμως, $\sum_{t=1}^x f(t) = p \sum_{t=1}^x q^{t-1} = p(1 + q + \dots + q^{x-1}) = p \frac{1-q^x}{1-q} = p \frac{1-q^x}{p} = 1 - q^x$. Καταλήγουμε στον ακόλουθο

τύπο: $F(x) = 0, x < 1$ και $F(x) = 1 - q^x, x \geq 1$.

Παράδειγμα 11 Από έρευνες έχει διαπιστωθεί ότι οι μαθητές της Γ' τάξης του Γυμνασίου καπνίζουν σε ποσοστό 4%. Αν αρχίσουμε και ρωτάμε τον ένα μετά τον άλλον μαθητές της Γ' τάξης του Γυμνασίου να απαντήσουν στο ερώτημα αν καπνίζουν ή όχι μέχρις ότου λάβουμε την πρώτη θετική απάντηση, να υπολογιστεί η πιθανότητα να κάνουμε (α) άρτιο αριθμό ερωτήσεων (β) περισσότερες από 8 ερωτήσεις και λιγότερες από 13.

Λύση. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των ερωτήσεων που θα κάνουμε μέχρις ότου λάβουμε για πρώτη φορά θετική απάντηση. Τότε $X \sim G\left(p = \frac{4}{100}\right)$

Για $x = 1, \dots$ έχουμε $f(x) = P(X = x) = \left(\frac{96}{100}\right)^{x-1} \frac{4}{100}$, $F(x) = P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{96}{100}\right)^x$.

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$f(2) + f(4) + \dots = \sum_{x=1}^{\infty} f(2x) = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{96}{100}\right)^{2x-1} \frac{4}{100} = \frac{4}{100} \frac{100}{96} \sum_{x=1}^{\infty} \left[\left(\frac{96}{100}\right)^2\right]^x = \frac{24}{49}.$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(8 < X < 13) = P(8 < X \leq 12) = F(12) - F(8) = \left[1 - \left(\frac{96}{100}\right)^{12}\right] - \left[1 - \left(\frac{96}{100}\right)^8\right] \cong 0.11. \blacksquare$$

Παράδειγμα 12 Έστω ένα μπρελόκ με 6 κλειδιά, εκ των οποίων ένα μόνο ανοίγει μια πόρτα. Δοκιμάζουμε τα κλειδιά στην πόρτα, χωρίς κάποια προτίμηση στη σειρά, μέχρι να βρούμε αυτό που την ανοίγει. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις. (α) Όταν ελέγξουμε ότι ένα κλειδί δεν ανοίγει την πόρτα, το βάζουμε στην άκρη και δεν το ξαναδοκιμάζουμε. (β) Έστω εναλλακτικά πως λόγω του ότι πάσχουμε από αμνησία όταν ελέγξουμε ότι ένα κλειδί δεν ανοίγει την πόρτα, δεν το βάζουμε στην άκρη, αλλά το επιστρέφουμε στο μπρελόκ και ξαναρχίζουμε την αναζήτηση εντελώς από την αρχή. Υπολογίστε και για τις δύο περιπτώσεις την πιθανότητα να χρειαστούμε ακριβώς 4 προσπάθειες μέχρι να βρούμε το σωστό κλειδί.

Λύση. Έστω X το πλήθος των φορών που θα δοκιμάσουμε αν ανοίγει την πόρτα ένα κλειδί. (α) Σε αυτήν την περίπτωση, η τ.μ. X είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και επομένως

$P\{X=i\}=\frac{1}{6}, i=1,\dots,6$. Άρα, $P\{X=4\}=\frac{1}{6}$. (β) Στη δεύτερη περίπτωση η τ.μ. X ακολουθεί τη γεωμετρική

κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας $p=\frac{1}{6}$, επομένως $P\{X=4\}=(1-p)^3 p=\left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6}=\frac{5^3}{6^4}$. ■

(ε) Υπεργεωμετρική τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι μία κάλπη περιέχει a λευκές και b μαύρες σφαίρες. Εξάγουμε διαδοχικά τη μία μετά την άλλη n σφαίρες χωρίς επανατοποθέτηση. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των λευκών σφαιρών που περιέχονται στο δείγμα των n σφαιρών. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται **υπεργεωμετρική κατανομή** (hypergeometric distribution) **με παραμέτρους a, b και n** και θα συμβολίζεται με $h(n, a, b)$. Η συνάρτηση πιθανότητας της υπεργεωμετρικής κατανομής με

παραμέτρους a, b και n δίνεται από τον τύπο: $f_X(x) = P(X=x) = \frac{\binom{a}{x} \binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}$.

Τα αποτελέσματα του πειράματος είναι όλες οι δυνατές επιλογές n σφαιρών από τις $a+b$ συνολικά σφαίρες που υπάρχουν στην κάλπη. Τα ευνοϊκά αποτελέσματα για το ενδεχόμενο $\{X=x\}$ προκύπτουν επιλέγοντας x λευκές σφαίρες από τις a που είναι διαθέσιμες και $n-x$ μαύρες από τις b που είναι διαθέσιμες. Το πλήθος των τρόπων επιλογής των x λευκών σφαιρών είναι $\binom{a}{x}$ και για κάθε τέτοια επιλογή υπάρχουν $\binom{b}{n-x}$ δυνατές επιλογές για τις $n-x$ μαύρες σφαίρες που χρειάζονται για να συμπληρωθεί το δείγμα. Ο αριθμός των τρόπων επιλογής των ευνοϊκών αποτελεσμάτων θα είναι, από τη Βασική Αρχή Απαρίθμησης, ίσος με $\binom{a}{x} \binom{b}{n-x}$. Το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι το διακριτό σύνολο $\{0, 1, \dots, k\}$, όπου $k = \min\{n, a\}$. Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή με παραμέτρους a, b και n γράφουμε $X \sim h(n, a, b)$.

Η f_X είναι πράγματι μία σ.π. διότι $\sum_{x=0}^k f_X(x) = \sum_{x=0}^k \frac{\binom{a}{x} \binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}} = \frac{1}{\binom{a+b}{n}} \sum_{x=0}^k \binom{a}{x} \binom{b}{n-x} = \frac{1}{\binom{a+b}{n}} \binom{a+b}{n}$, διότι

αποδεικνύεται ότι ισχύει η ταυτότητα $\sum_{x=0}^k \binom{a}{x} \binom{b}{n-x} = \binom{a+b}{n}$.

Παράδειγμα 13 Οι τύποι ομάδων αίματος είναι O, A, B και AB. Έχουμε εκατό άτομα από τα οποία σαράντα πέντε έχουν τύπο αίματος O. Επιλέγουμε τυχαία είκοσι άτομα. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των ατόμων με ομάδα αίματος O. Ζητάμε να βρούμε την πιθανότητα $X = 8$.

Λύση. Είναι $P(X = 8) = f_x(8) = \frac{\binom{45}{8} \binom{55}{12}}{\binom{100}{20}} = 0.176$, διότι $X \sim h(20, 45, 55)$. ■

Παράδειγμα 14 Ακριβώς οι μισές από τις 10 μπαταρίες που κρατάτε στο ντουλάπι σας είναι άδειες χωρίς όμως να ξέρετε ποιες είναι αυτές. Βιαστικά φεύγετε σε εκδρομή και παίρνετε 4 μπαταρίες από το ντουλάπι χωρίς να έχετε χρόνο να ελέγξετε αν είναι άδειες ή φορτισμένες. Ποια είναι η πιθανότητα καμία από τις 4 μπαταρίες να μην είναι φορτισμένη;

Λύση. Έστω X το πλήθος φορτισμένων μπαταριών που επιλέξατε. Εφόσον επιλέγουμε μπαταρίες χωρίς

επανατοποθέτηση, $X \sim h(4, 5, 5)$. Άρα, $P\{X = 0\} = \frac{\binom{5}{0} \binom{5}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{42} \approx 2.38\%$. ■

(στ) Αρνητική διωνυμική τυχαία μεταβλητή. Έστω μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας ίση με $p \neq 0$. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που δίνει το πλήθος των αποτυχιών μέχρι ότου οι πρώτες r , $r \geq 1$, επιτυχίες εμφανιστούν, οπότε το πείραμα τύχης τερματίζεται. Για να συμβεί το παραπάνω πρέπει το πείραμα τύχης να επαναληφθεί r φορές συν το πλήθος των αποτυχιών πριν την r -οστή επιτυχία. Το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι το διακριτό σύνολο $\{0, 1, 2, \dots\}$.

Λέμε ότι η X ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους r , p και γράφουμε $X \sim \text{NegativeBinomial}(r, p)$. Στη ειδική περίπτωση κατά την οποία $r = 1$ έχουμε τη Γεωμετρική κατανομή. Η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι

$$f_x(x) = P(X = x) = P(\text{στις πρώτες } x+r-1 \text{ δοκιμές έχουμε } r-1 \text{ επιτυχίες}) P(\text{στη } x+r \text{ δοκιμή έχω επιτυχία}) = \binom{x+r-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^x p = \binom{x+r-1}{x} p^r (1-p)^x, x = 0, 1, \dots$$

Η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια της ταυτότητας $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $1 \leq k \leq n-1$. Το ενδεχόμενο $\{X = x\}$ σημαίνει ότι εμφανίστηκαν r επιτυχίες, από

τις οποίες μία στην τελευταία θέση και x αποτυχίες πριν την τελευταία επιτυχία. Λόγω ανεξαρτησίας η πιθανότητα ενός τέτοιου ενδεχομένου είναι ίση με $p^{r-1} (1-p)^x p = p^r (1-p)^x$ και η πιθανότητα αυτή είναι η

ίδια ανεξάρτητα από τις θέσεις στις οποίες οι πρώτες $r-1$ επιτυχίες συνέβησαν και φυσικά και οι x αποτυχίες. Ο αριθμός αυτών των γεγονότων είναι ίσος με τον αριθμό επιλογής x θέσεων από $x+r-1$ θέσεις για την τοποθέτηση των πρώτων $r-1$ επιτυχιών, δηλαδή $\binom{x+r-1}{x}$.

Η f_X είναι πράγματι μία συνάρτηση πιθανότητας διότι είναι μη-αρνητική και επιπλέον διαδοχικά έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+r-1}{x} (1-p)^x p^r = p^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+r-1}{x} (1-p)^x = p^r \sum_{x=0}^{\infty} (-1)^x \binom{-r}{x} (1-p)^x = p^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (p-1)^x \\ &= p^r [1 + (p-1)]^{-r} = p^r p^{-r} = 1.\end{aligned}$$

Η τρίτη ισότητα ισχύει διότι

$$\binom{x+r-1}{x} = \frac{(x+r-1)!}{x!(r-1)!} = \frac{(x+r-1) \cdots r}{x!} = (-1)^x \frac{(-r)(-r-1)(-r-2) \cdots (-r-x+1)}{x!} = (-1)^x \binom{-r}{x}.$$

Η πέμπτη ισότητα ισχύει διότι $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$.

Παράδειγμα 15 Για την πρόσληψη του διευθυντή πωλήσεων ενός καταστήματος μία επιτροπή έχει να επιλέξει από ένα πλήθος υποψηφίων που υπέβαλαν αίτηση. Η επιτροπή αποφασίζει να εξετάσει έναν-έναν, που επιλέγεται τυχαία, προκειμένου να επιλέξει τρεις από το σύνολο των υποψηφίων για να καλύψει τρεις θέσεις λογιστών. Υποτίθεται ότι 40% των υποψηφίων είναι ικανοί να καταλάβουν μία από αυτές τις θέσεις. Να βρεθεί η πιθανότητα οι θέσεις να καλυφθούν με τον πέμπτο εξεταζόμενο υποψήφιο.

Λύση. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των εξεταζόμενων υποψηφίων που αποτυγχάνουν μέχρι την κάλυψη και της τρίτης θέσης λογιστή, τότε η X ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή με $p = 0.4$, $r = 3$. Ζητάμε την πιθανότητα $P(X = 2) = \binom{4}{2} 0.4^3 0.6^2 = 0.1382$. ■

3.5 Παραδείγματα συνεχών τυχαίων μεταβλητών

(α) Ομοιόμορφη συνεχής τυχαία μεταβλητή. Μία συνέχης τυχαία μεταβλητή X καλείται **ομοιόμορφη** αν η

συνάρτηση πυκνότητας f_X δίνεται από τον τύπο $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$. Η f_X είναι πράγματι μία

συνάρτηση πυκνότητας διότι $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} = 1$. Λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη **συνεχής**

ομοιόμορφη κατανομή (continuous uniform distribution) στο διάστημα $[a, b]$ και γράφουμε $X \sim U(a, b)$.

Είναι μία κατανομή η οποία έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε σε υποδιαστήματα του $[a, b]$ με ίσο πλάτος (εύρος)

να αντιστοιχεί η ίδια πιθανότητα. Επειδή σε μία συνεχή κατανομή, σε ενδεχόμενα της μορφής $\{X = x\}$ αντιστοιχούν μηδενικές πιθανότητες, δεν έχει σημασία κατά πόσο στον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας της $U(a, b)$ χρησιμοποιούμε ανισότητες της μορφής $a \leq x$ ή $a < x$ κλπ. Η συνάρτηση κατανομής F_X της X

$$\text{δίνεται από τον τύπο } F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b. \text{ Οι ποσότητες } a \text{ και } b \text{ είναι οι } \mathbf{\text{παράμετροι}} \text{ της ομοιόμορφης} \\ 1, & x > b \end{cases}$$

κατανομής.

Παράδειγμα 16 Ένας αριθμός X επιλέγεται τυχαία στο διάστημα $[0, 2]$. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες (α) το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του αριθμού X να διαιρείται με το 3.

(β) το πρώτο δεκαδικό ψηφίο της τρίτης ρίζας του X να είναι το 2.

Λύση. Αφού ο αριθμός επιλέγεται τυχαία από το διάστημα $[0, 2]$, η τυχαία μεταβλητή X θα ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2]$ και η συνάρτηση κατανομής της θα δίνεται από τον τύπο

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq 2. \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

(α) Για να διαιρείται με το 3 το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του X , θα πρέπει να είναι 0 ή 3 ή 6 ή 9. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $0.0 \leq X < 0.1$ ή $1.0 \leq X < 1.1$ ή $X = 2$, στην δεύτερη $0.3 \leq X < 0.4$ ή $1.3 \leq X < 1.4$, στην τρίτη $0.6 \leq X < 0.7$ ή $1.6 \leq X < 1.7$ ενώ στην τέταρτη $0.9 \leq X < 1$ ή $1.9 \leq X < 2$. Όμως, $P(X = 2) = 0$, οπότε

$$P(\{0.0 \leq X < 0.1\} \cup \{1.0 \leq X < 1.1\} \cup \{X = 2\}) = P(0 \leq X < 0.1) + P(1 \leq X < 1.1) \\ = (F(0.1) - F(0)) + (F(1.1) - F(1)) = \frac{0.1}{2} - \frac{0}{2} + \frac{1.1}{2} - \frac{1}{2} = 0.1.$$

Παρόμοια, $P(\{0.3 \leq X < 0.4\} \cup \{1.3 \leq X < 1.4\}) = 0.1$, $P(\{0.6 \leq X < 0.7\} \cup \{1.6 \leq X < 1.7\}) = 0.1$

$P(\{0.9 \leq X < 1\} \cup \{1.9 \leq X < 2\}) = 0.1$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.4$.

(β) Ζητάμε την πιθανότητα $P(\{0.2 \leq \sqrt[3]{X} < 0.3\} \cup \{1.2 \leq \sqrt[3]{X} < 1.3\})$.

Όμως,

$$P(\{0.2 \leq \sqrt[3]{X} < 0.3\}) = P(\{(0.2)^3 \leq X < (0.3)^3\}) = P(0.008 \leq X < 0.027) = F(0.027) - F(0.008) = 0.0095.$$

Παρόμοια έχουμε

$$P(\{1.2 \leq \sqrt[3]{X} < 1.3\}) = P(\{(1.2)^3 \leq X < (1.3)^3\}) = F(2.197) - F(1.728) = 1 - \frac{1.728}{2} = 0.136.$$

Επομένως, $P(\{0.2 \leq \sqrt[3]{X} < 0.3\} \cup \{1.2 \leq \sqrt[3]{X} < 1.3\}) = 0.0095 + 0.136 = 14.55\%$. ■

Παράδειγμα 17 Έστω ότι η ώρα άφιξης ενός τρένου σε ένα σταθμό είναι μία ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή X με παραμέτρους τις πρωινές ώρες 8:45 και 9:15, δηλαδή $X \sim U(8:45, 9:15)$. Αν φτάσετε στο σταθμό ακριβώς στις 9:00, ποια είναι η πιθανότητα (α) να χάσετε το τρένο; (β) να περιμένετε ακριβώς πέντε λεπτά; (γ) να περιμένετε το πολύ πέντε λεπτά; (δ) να περιμένετε τουλάχιστον πέντε λεπτά;

Λύση. (α) $P(X < 9:00) = P(X \leq 9:00) = F_X(9) = \frac{9 - 8:45}{9:15 - 8:45} = 0.5$.

(β) $P(X = 9:05) = 0$.

(γ) $P(9:00 \leq X \leq 9:05) = F_X(9:05) - F_X(9:00) = \frac{1}{6}$.

(δ) $P(X \geq 9:05) = 1 - P(X < 9:05) = 1 - F_X(9:05) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. ■

(β) Εκθετική τυχαία μεταβλητή. Λέμε ότι η X είναι μία **εκθετική** τυχαία μεταβλητή με **παράμετρο** $\lambda > 0$

αν η συνάρτηση πυκνότητας της f_X δίνεται από τον τύπο $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Η f_X είναι πράγματι μία

συνάρτηση πυκνότητας διότι $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{\infty} (e^{-\lambda x})' dx = 1$. Η συνάρτηση κατανομής F_X της X

δίνεται από τον τύπο

$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Επιπλέον, $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

Μία σημαντική ιδιότητα της εκθετικής τυχαίας μεταβλητής είναι η **αμνήμων ιδιότητα**, σύμφωνα με την οποία ισχύει ότι $P(X > r+t | X > r) = P(X > t)$, $r, t > 0$.

Είναι $P(X > r+t | X > r) = \frac{P(X > r+t, X > r)}{P(X > r)} = \frac{P(X > r+t)}{P(X > r)} = \frac{e^{-\lambda(r+t)}}{e^{-\lambda r}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$.

Μπορούμε να σκεφτούμε την X ως το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να παρουσιάσει βλάβη ένα μηχάνημα. Η τυχαία μεταβλητή X μετριέται από τη στιγμή που αρχίζει το μηχάνημα να λειτουργεί. Οι τελευταίες ισότητες μας λένε ότι αν το μηχάνημα δεν είχε παρουσιάσει βλάβη μέχρι τη χρονική στιγμή r η πιθανότητα να μην παρουσιάσει βλάβη στις επόμενες t χρονικές μονάδες είναι ίση με τη μη-δεσμευμένη πιθανότητα το μηχάνημα να μην είχε υποστεί βλάβη στις πρώτες t χρονικές μονάδες. Αυτό σημαίνει ότι η γήρανση του μηχανήματος δεν αυξάνει ούτε μειώνει την πιθανότητα να υποστεί βλάβη το μηχάνημα εντός ενός καθορισμένου χρονικού διαστήματος. Η Εκθετική κατανομή (Exponential distribution) αποτελεί, μεταξύ

άλλων, το κατάλληλο πιθανοθεωρητικό μοντέλο για το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών κλήσεων σε ένα τηλεφωνικό κέντρο ή για το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών ατυχημάτων σε ένα συγκεκριμένο σημείο της Εθνικής οδού.

Παράδειγμα 18 Ο χρόνος ζωής ενός ανθρώπου είναι μία τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{75}$. Βρείτε την πιθανότητα ο άνθρωπος αυτός να ζήσει (α) το πολύ εβδομήντα χρόνια (β) ακριβώς εβδομήντα χρόνια (γ) τουλάχιστον εβδομήντα χρόνια (δ) πάνω από εβδομήντα χρόνια αν είναι τριάντα χρονών.

Λύση. (α) $P(X \leq 70) = F_X(70) = 1 - e^{-\frac{70}{75}} = 0.61$.

(β) $P(X = 70) = 0$.

(γ) $P(X \geq 70) = e^{-\frac{70}{75}} = 0.39$.

(δ) $P(X > 70 | X > 30) = P(X > 40) = e^{-\frac{40}{75}} = 0.59$. Η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια της ιδιότητας της έλλειψης μνήμης της Εκθετικής κατανομής. ■

Παράδειγμα 19 Έστω ότι η διάρκεια X μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{15}$. (α) Αν κάποιος φτάσει σε ένα τηλεφωνικό θάλαμο ακριβώς πριν από εμάς, ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένουμε περισσότερο από 15 λεπτά; (β) Αν τη στιγμή που φτάνουμε στον τηλεφωνικό θάλαμο, το άτομο που είναι μέσα, μιλάει ήδη για 15 λεπτά, ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένουμε περισσότερο από 15 λεπτά;

Λύση. Η συνάρτηση κατανομής της X δίνεται από τον τύπο $F(t) = 0, t < 0$ και $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{15}}, t \geq 0$.

(α) Έχουμε $P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - F(15) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1} \cong 36.8\%$.

(β) Με χρήση της ιδιότητας της έλλειψης μνήμης της Εκθετικής κατανομής, έχουμε:

$P(X > 15 + 15 | X > 15) = P(X > 15) = 1 - F(15) = e^{-1} \cong 36.8\%$. ■

Παράδειγμα 20 Έστω τυχαία μεταβλητή X ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0,1]$. Έστω Y τυχαία μεταβλητή εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο $\lambda = 1$. Έστω τυχαία μεταβλητή Z που ορίζεται ως εξής: ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρμα και αν έρθει γράμματα, τότε $Z = X$. Αν έρθει κεφαλή $Z = Y$. Ποια είναι η πιθανότητα $P\left(Z < \frac{1}{2}\right)$.

Λύση. Έστω T το κέρμα να είναι γράμματα. Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε

$$P\left(Z < \frac{1}{2}\right) = P\left(Z < \frac{1}{2} | T\right)P(T) + P\left(Z < \frac{1}{2} | T^c\right)P(T^c) = P\left(X < \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + P\left(Y < \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + (1 - e^{-\frac{1}{2}}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{2}.$$

(γ) Τυχαία μεταβλητή Γάμμα. Λέμε ότι η X είναι μία τυχαία μεταβλητή Γάμμα (Gamma) με θετικές

παραμέτρους a και λ αν η συνάρτηση πυκνότητάς της f_X είναι $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} \lambda^a e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$

όπου, $\Gamma(a)$ είναι η **συνάρτηση Γάμμα** (Gamma function) και ορίζεται ως εξής $\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1} e^{-y} dy, \quad a > 0.$ Η

τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την **κατανομή Γάμμα** (Gamma distribution) με **παραμέτρους a και λ** και γράφουμε $X \sim \text{Γάμμα}(a, \lambda)$. Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή $N(t), t \geq 0$, η οποία μετρά τον αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \dots, X_n$ που αναπαριστούν τον ενδιάμεσο χρόνο μεταξύ της πραγματοποίησης του $(n-1)$ -οστού και του n -οστού γεγονότος. Η κατανομή Γάμμα εκφράζει το συνολικό χρόνο μέχρι την n -οστή πραγματοποίηση ενός γεγονότος. Επομένως, $X = X_1 + \dots + X_n$. Για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής της X , έχουμε

$$F(t) = P(X \leq t) = P(N(t) \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(N(t) = i) = \sum_{i=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad t \geq 0,$$

διότι η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ αποδεικνύεται ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt . Η συνάρτηση Γάμμα αποτελεί γενίκευση της έννοιας του παραγοντικού, όπως φαίνεται και από τις ακόλουθες ιδιότητές της.

(i) $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$, όπου $a > 1$.

Άμεση συνέπεια της ιδιότητας (i) είναι η ιδιότητα

(ii) $\Gamma(a) = (a-1)!, \quad a = 1, 2, \dots$, διότι

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1) = (a-1)(a-2)\Gamma(a-2) = (a-1)(a-2) \cdots \Gamma(1) = (a-1)!, \quad \text{επειδή}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-y} dy = 1. \quad \text{Επιπλέον ισχύει ότι } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Η f_X είναι πράγματι μία συνάρτηση πυκνότητας διότι, αν θέσουμε $y = \lambda x$, διαδοχικά έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} \lambda^a e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty y^{a-1} e^{-y} dy = \frac{1}{\Gamma(a)} \Gamma(a) = 1.$$

Στην περίπτωση που $a = 1$ η X είναι μία Εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda > 0$. Λέμε ότι η X είναι μία Χι-τετράγωνο (chi-squared) τυχαία μεταβλητή με r βαθμούς ελευθερίας (degrees of freedom) και γράφουμε $X \sim X_r^2$, $r = 1, 2, \dots$ αν ισχύει ότι

$$X \sim \text{Γάμμα}\left(a = \frac{r}{2}, \lambda = \frac{1}{2}\right) \text{ και η σ.π. της, } f_X \text{ είναι } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) 2^{r/2}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Παράδειγμα 21 Ο χρόνος επισκευής (σε ώρες) μιας βλάβης ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $a = \lambda = 2$. Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστεί για την επισκευή της βλάβης (α) το πολύ μία ώρα; (β) χρόνος από 60 έως 90 λεπτά;

Λύση. Η συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου επισκευής X της βλάβης δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{2^2}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-2x} = 4xe^{-2x}, x \geq 0. \text{ Η συνάρτηση κατανομής είναι } F(t) = 1 - \sum_{i=0}^1 e^{-2t} \frac{(2t)^i}{i!} = 1 - e^{-2t}(1 + 2t),$$

$t \geq 0$.

(α) Είναι $P(X \leq 1) = F(1) = 1 - 3e^{-2} \cong 59.4\%$.

(β) Είναι $P(1 \leq X < 1.5) = F(1.5) - F(1) = 3e^{-2} - 4e^{-3} \cong 20.7\%$. ■

(δ) Κανονική τυχαία μεταβλητή. Λέμε ότι η X είναι μία **κανονική** τυχαία μεταβλητή (normal random variable) με παραμέτρους $\mu \in \mathfrak{R}$, $\sigma^2 > 0$ και γράφουμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, αν η συνάρτηση πυκνότητας της, f_X

είναι $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, $x \in \mathfrak{R}$. Εναλλακτικά λέμε ότι η X ακολουθεί την **κανονική κατανομή** ή την

κατανομή Gauss. Η f_X είναι πράγματι μία συνάρτηση πυκνότητας (για την απόδειξη βλέπε βιβλίο Μ. Κούτρα, Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Μέρος Ι, σελ. 396-397).

Το γράφημα της f_X είναι μία κωδωνοειδής καμπύλη και επιπλέον ισχύει ότι $f_X(\mu + x) = f_X(\mu - x)$, $x \in \mathfrak{R}$, δηλαδή η f_X είναι συμμετρική αναφορικά με την παράμετρο μ . Η f_X μεγιστοποιείται σημείο $x_0 = \mu$ το οποίο είναι το μόνο τοπικό μέγιστο (είναι και ολικό μέγιστο) και τα σημεία καμπής της είναι τα $x_1 = \mu - \sigma$ και

$x_2 = \mu + \sigma$. Επιπλέον ισχύει ότι $f'_X(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f_X(x)$ και $f''_X(x) = \frac{1}{\sigma^2} \left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] f_X(x)$, για κάθε

$x \in \mathfrak{R}$. Οι αποδείξεις των παραπάνω αποτελεσμάτων περιλαμβάνονται στο βιβλίο του Κούτρα, σελ. 402-403. Πρόχειρες γραφικές παραστάσεις για τη συνάρτηση πυκνότητας αλλά και τη συνάρτηση κατανομής κανονικών

τυχαίων μεταβλητών για διάφορες τιμές των παραμέτρων μ και σ^2 παρουσιάζονται στις σελ. 404-405 του βιβλίου του Κούτρα και στη σελ. 94 του βιβλίου του Ρούσσα. Αν $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$, τότε $X \sim N(0, 1)$ και η X είναι μία **τυπική** (standard, unit) **κανονική τυχαία μεταβλητή** ή μία **τυποποιημένη κανονική τυχαία μεταβλητή**. Εναλλακτικά λέμε ότι η X ακολουθεί την **τυπική κανονική** ή την **τυποποιημένη κανονική κατανομή**. Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$ της X δεν μπορεί να βρεθεί σε κλειστή μορφή. Για τη τυχαία μεταβλητή $X \sim N(0, 1)$, οι τιμές της συνάρτησης κατανομής της, Φ_X δηλαδή της συνάρτησης $\Phi_X(x) = \int_{-\infty}^x \phi_X(t)dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x \in \mathbb{R}$, όπου ϕ_X είναι η σ.π. της X , βρίσκονται σε κατάλληλους πίνακες τιμών (βλέπε βιβλίο Μ. Κούτρα, Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Μέρος Ι, σελ. 398 και βιβλίο Ρούσσα, σελ. 292). Η κανονική κατανομή είναι η πιο σπουδαία κατανομή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και στη Στατιστική. Είναι κατάλληλη για την περιγραφή πληθυσμιακών χαρακτηριστικών (π.χ. ύψος, βάρος) αλλά και για την πιθανοθεωρητική περιγραφή των τυχαίων σφαλμάτων σε διάφορες πειραματικές μετρήσεις. Για το δεύτερο αυτό λόγο, μερικές φορές η κανονική κατανομή καλείται και **κατανομή των σφαλμάτων** (distribution of errors). Ισχύει η ακόλουθη σημαντική πρόταση.

Πρόταση 3.1 Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Απόδειξη. Έχουμε $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq \sigma z + \mu) = F_X(\sigma z + \mu)$. Παραγωγίζουμε ως προς

z και διαδοχικά έχουμε $f_Z(z) = F'_Z(z) = \frac{d}{dz} F_X(\sigma z + \mu) = \sigma f_X(\sigma z + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Rightarrow Z \sim N(0, 1)$. ■

Παράδειγμα 22 Έστω τυχαία μεταβλητή $X \sim N(5, 2)$. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(1 < X < 3)$.

Λύση. Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 3.1 και έχουμε

$$P(1 < X < 3) = P\left(\frac{1-5}{\sqrt{2}} < Z = \frac{X-5}{\sqrt{2}} < \frac{3-5}{\sqrt{2}}\right) = \Phi_Z\left(\frac{3-5}{\sqrt{2}}\right) - \Phi_Z\left(\frac{1-5}{\sqrt{2}}\right),$$

διότι η τυχαία μεταβλητή $Z \sim N(0, 1)$. ■

Πρόταση 3.2 Αν $X \sim N(0, 1)$, τότε $\Phi_X(x) + \Phi_X(-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αν θέσουμε $u = -t$ διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi_X(x) + \Phi_X(-x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} (-1) du \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1. \blacksquare\end{aligned}$$

Παράδειγμα 23 Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P\left(-1 \leq Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \leq 1\right) = \Phi_Z(1) - \Phi_Z(-1)$
 $= \Phi_Z(1) - (1 - \Phi_Z(1)) = 2\Phi_Z(1) - 1 = 2 \cdot 0.84 - 1 = 0.68.$

Σύμφωνα με το παραπάνω παράδειγμα, το 68% του χωρίου της κανονικής κωδωνοειδούς καμπύλης βρίσκεται ανάμεσα στα όρια $\mu - \sigma$ και $\mu + \sigma$. Ο αριθμός z για τον οποίον $P(Z > z) = \alpha$, $0 < \alpha < 1$, καλείται α -ποσοστιαίο σημείο (ή ποσοστημόριο) της κανονικής κατανομής και συμβολίζεται με z_α . ■

Παράδειγμα 24 Αν $Z \sim N(0,1)$ να βρεθεί ο z τέτοιος ώστε $P(Z > z) = \alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Λύση. Είναι $P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z) = \alpha$. Άρα, $\Phi(z) = 1 - \alpha$. Για $\alpha = 0.01$, $\Phi(z) = 0.99$. Από τους πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής $z \cong 2.33$. Για $\alpha = 0.05$, $\Phi(z) = 0.95$. Από τους πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής $z \cong 1.64$. Για $\alpha = 0.1$, $\Phi(z) = 0.9$. Από τους πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής $z \cong 1.28$. Επιπλέον, αν $Z \sim N(0,1)$, από τους πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής, έχουμε

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826 \cong 68\%.$$

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2(0.9772) - 1 = 0.9544 \cong 95\%.$$

$$P(-3 \leq Z \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 2(0.9987) - 1 = 0.9974 \cong 99.7\%.$$

Επιπλέον, αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε, από την Πρόταση 3.1, έχουμε

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(|X - \mu| \leq \sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1).$$

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η παράμετρος μ είναι η μέση τιμή της κανονικής κατανομής και η παράμετρος σ^2 είναι η διασπορά της κανονικής κατανομής. Επομένως, περίπου το 68% των τιμών μίας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή βρίσκεται σε απόσταση το πολύ μιας τυπικής απόκλισης σ από τη μέση τιμή μ , περίπου 95% βρίσκεται σε απόσταση δύο τυπικών αποκλίσεων από τη μέση τιμή και περίπου 99% βρίσκεται σε απόσταση τριών τυπικών αποκλίσεων από τη μέση τιμή. ■

Παράδειγμα 25 Η εσωτερική διάμετρος (σε ίντσες) των σωλήνων από χαλκό που παράγει ένα εργοστάσιο ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(10, \sigma^2)$. Σωλήνες με εσωτερική διάμετρο εκτός των ορίων 10 ± 0.1 ίντσες ανακυκλώνονται. (α) Αν $\sigma = 0.1$ να βρεθεί η πιθανότητα να ανακυκλωθούν ακριβώς τρεις σωλήνες σε

ένα δείγμα πέντε σωλήνων που επιλέγεται τυχαία από την παραγωγή του εργοστασίου. (β) Πόση θα πρέπει να γίνει η παράμετρος σ^2 έτσι ώστε η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα να είναι 0.06;

Λύση. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά την εσωτερική διάμετρο των σωλήνων.

Τότε $X \sim N(10, \sigma^2)$. Η πιθανότητα ανακύκλωσης των σωλήνων είναι

$$p = P(X > 10.1 \text{ ή } X < 9.9) = 1 - P(9.9 < X < 10.1) \\ = 1 - P\left(\frac{9.9-10}{\sigma} < \frac{X-10}{\sigma} < \frac{10.1-10}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) + \Phi\left(-\frac{0.1}{\sigma}\right) = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right].$$

(α) Η πιθανότητα ανακύκλωσης είναι $p = 2[1 - \Phi(1)] = 2[1 - 0.8413] = 0.3174$. Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των σωλήνων από το δείγμα των πέντε σωλήνων που ανακυκλώνονται. Ισχύει ότι

$$Y \sim \text{Bin}(n=5, p=0.3174). \text{ Τότε } P(Y=3) = \binom{5}{3} (0.3174)^3 (1-0.3174)^2 \cong 0.149.$$

$$(β) \text{ Θα πρέπει } p = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right] = 0.06 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) = 0.97 \cong \Phi(1.88). \text{ Άρα, } \frac{0.1}{\sigma} = 1.88 \Rightarrow \sigma = 0.053.$$

$$\sigma^2 = 0.002809. \blacksquare$$

(ε) Τυχαία μεταβλητή Cauchy. Λέμε ότι η X είναι μία Cauchy τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ και γράφουμε $X \sim \text{Cauchy}(a, b)$ αν η συνάρτηση πυκνότητας της, f_X είναι

$$f_X(x) = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{1}{b^2 + (x-a)^2}, x \in \mathbb{R}. \text{ Η } f_X \text{ είναι πράγματι μία συνάρτηση πυκνότητας διότι}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{b^2 + (x-a)^2} = \frac{1}{\pi b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\pi} [\text{arctan } y]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 1. \text{ Στην τρίτη ισότητα θέσαμε } y = \frac{x-a}{b}.$$

(στ) Τυχαία μεταβλητή Βήτα. Λέμε ότι η X είναι μία τυχαία μεταβλητή Βήτα (Beta) με θετικές παραμέτρους a, b και γράφουμε $X \sim \text{Beta}(a, b)$ αν η συνάρτηση πυκνότητάς f_X είναι

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, 0 < x < 1 \text{ και } f_X(x) = 0, x \notin (0,1). \text{ Η } f_X \text{ είναι πράγματι μία συνάρτηση}$$

$$\text{πυκνότητας διότι } \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = 1, \text{ επειδή } B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

και η συνάρτηση $B(a, b)$ καλείται συνάρτηση Βήτα (Beta function). Αν $a = b = 1$, τότε μία τυχαία μεταβλητή

τέτοια ώστε $X \sim B(1,1)$ συμπίπτει με την ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $(0,1)$. Λέμε ότι η X ακολουθεί την κατανομή Βήτα με παραμέτρους a και b . Η κατανομή Βήτα παρέχει ένα ικανοποιητικό μοντέλο για την περιγραφή τυχαίων μεταβλητών που παίρνουν τιμές μεταξύ δύο συγκεκριμένων ορίων όπως για παράδειγμα, το ποσοστό ατόμων ενός πληθυσμού που έχουν μία συγκεκριμένη ιδιότητα.

(ζ) Τυχαία μεταβλητή t_n – Student. Λέμε ότι η X είναι μία Student τυχαία μεταβλητή με $n=1,2,\dots$ βαθμούς ελευθερίας και γράφουμε $X \sim t_n$, αν η συνάρτηση πυκνότητάς της f_X είναι

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathcal{R}. \quad \text{Ισχύει ότι } \lim_{n \rightarrow \infty} f_X(x) = \phi(x), x \in \mathcal{R}, \quad \text{όπου } \phi \text{ είναι η συνάρτηση}$$

πυκνότητας της τυπικής κανονικής κατανομής. Η κατανομή t_n χρησιμοποιείται πολύ στη Στατιστική Συμπερασματολογία για την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης και τη διεξαγωγή ελέγχων υποθέσεων.

3.6 Προτάσεις, εφαρμογές και προβλήματα

Πρόταση 3.3 Αν X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f_X και $Y = X^2$ τότε η συνάρτηση πυκνότητας f_Y της Y δίνεται από τη σχέση

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})], & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση κατανομής της Y είναι

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}), & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}. \quad \text{Παραγωγίζοντας ως προς } y \text{ έχουμε}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y}) (-1) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})], & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Μία εφαρμογή της παραπάνω πρότασης έχουμε στην ακόλουθη εφαρμογή.

Εφαρμογή. Αν $X \sim N(0,1)$ τότε $Y = X^2 \sim X_1^2$.

$$\text{Είναι } f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) - f_X(-\sqrt{y})] = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0.$$

Η τελευταία ισότητα δίνει τη συνάρτηση πυκνότητας της X_1^2 . ■

Πρόταση 3.4 Έστω ότι F_X είναι η συνάρτηση κατανομής της συνεχούς τυχαιάς μεταβλητής X . Τότε η τυχαιά μεταβλητή $Y := F_X(X) \sim U(0, 1)$.

$$\text{Απόδειξη. Είναι } F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ P(X \leq F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y, & 0 < y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

Μία εφαρμογή της παραπάνω πρότασης έχουμε στην περίπτωση κατά την οποία $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Τότε $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \sim U(0, 1)$, όπου $\Phi(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής. ■

Πρόβλημα 1. Αν $X \sim N(0, 1)$ βρείτε την κατανομή της τυχαιάς μεταβλητής $Y = e^X$.

$$\text{Λύση. Είναι } F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ P(X \leq \log(y)) = F_X(\log(y)), & y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Άρα, } f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\log(y)) = \frac{1}{y} f_X(\log(y)) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log(y))^2}{2}}, \quad y > 0.$$

Η κατανομή της τυχαιάς μεταβλητής Y καλείται λογαριθμοκανονική (lognormal). ■

$$\text{Πρόβλημα 2. Επαληθεύσατε ότι οι συναρτήσεις } f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι συναρτήσεις πυκνότητας.

$$\text{Λύση. Είναι } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 -\frac{dt}{(1+t)^2} = -\left[\frac{1}{1+t}\right]_0^{\infty} = 1. \text{ Η πρώτη ισότητα προκύπτει αν θέσουμε } t = e^{-x}.$$

$$\text{Είναι } \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi} [\arctan(t)]_0^{\infty} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1. \text{ Η δεύτερη ισότητα προκύπτει αν}$$

θέσουμε $t = e^x$. ■

Πρόβλημα 3. Αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$, δείξτε ότι η πιθανότητα να πάρει η τυχαία μεταβλητή X άρτια τιμή είναι ίση με $(1 + e^{-2\lambda})/2$.

Λύση. $P(\text{η } X \text{ παίρνει άρτια τιμή}) = P\left[\bigcup_{x=0}^{\infty} \{X = 2x\}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2x}}{(2x)!} = e^{-\lambda} \left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \right) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda})$. Η προτελευταία ισότητα προκύπτει από τον τύπο του υπερβολικού συνιμητόνου σύμφωνα με τον οποίον, ισχύει ότι: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. ■

3.7 Μέση τιμή

Στα δύο επόμενα εδάφια θα μελετήσουμε συγκεκριμένες ποσότητες που προκύπτουν από τη συνάρτηση πιθανότητας (ή πυκνότητας) ή τη συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής, καλούνται **παράμετροι** (parameters) και δίνουν μία συνοπτική περιγραφή της συμπεριφοράς της τυχαίας μεταβλητής. Δίνουν κάποιες ενδείξεις για τη θέση και το σχήμα της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής. Η πρώτη παράμετρος που θα μελετήσουμε είναι η **μέση τιμή** (mean) η οποία αποτελεί για τη Θεωρία Πιθανοτήτων το ανάλογο του μέσου όρου ή του αριθμητικού μέσου μιας ακολουθίας αριθμών. Δίνει μία ένδειξη για τη θέση γύρω από την οποία είναι τοποθετημένες οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής. Αντιπροσωπεύει κατά κάποιο τρόπο όλες τις δυνατές τιμές μίας τυχαίας μεταβλητής. Για το λόγο αυτό συχνά καλείται **μέτρο (ή παράμετρος) θέσεως ή κεντρικής τάσεως** της αντίστοιχης κατανομής.

Ορισμός Η μέση τιμή (ή μέσος ή μαθηματική ελπίδα ή αναμενόμενη τιμή) μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως εξής: (α) $E(X) = \sum_x xP(X = x)$, αν $\sum_x |x| P(X = x) < \infty$ και η X είναι διακριτή.

(β) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$, αν $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)dx < \infty$ και η X είναι συνεχής.

Παράδειγμα 26 Έστω $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Είναι $EX = \sum_{x=0}^{\infty} xe^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} xe^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$
 $= \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$. Η πέμπτη ισότητα προκύπτει αν θέσουμε $y = x - 1$. ■

Παράδειγμα 27 Έστω $X \sim U(a, b)$. Είναι $\int_a^b |x| \frac{1}{b-a} dx \leq \max[|a|, |b|] < \infty$.

$$EX = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}. \blacksquare$$

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής δεν υπάρχει πάντα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η κατανομή Pareto η οποία, μεταξύ άλλων, χρησιμοποιείται αρκετά συχνά για την περιγραφή του εισοδήματος, του μεγέθους ενός πληθυσμού (βλέπε Παράδειγμα 6.3.1 στο βιβλίο Μ. Κούτρα, Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Μέρος Ι, σελ. 353-354). Η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Pareto δίνεται από τον τύπο: $f_X(x) = k\theta^k x^{-(k+1)}$, $x \geq \theta$ και $f_X(x) = 0$, $x < \theta$, όπου $k, \theta > 0$ είναι οι παράμετροι της κατανομής. Η μέση τιμή της κατανομής δεν υπάρχει για $k \leq 1$. Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα κατανομής για την οποία δεν υπάρχει η μέση τιμή είναι η κατανομή Cauchy. Έστω, για παράδειγμα, ότι $X \sim \text{Cauchy}(0,1)$ τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} [\log(1+x^2)]_0^{\infty} = \infty. \text{ Η πρώτη ισότητα προκύπτει διότι η προς ολοκλήρωση}$$

συνάρτηση είναι άρτια. Συνεπώς δεν υπάρχει η μέση τιμή της X .

Ισχύει η ακόλουθη σημαντική πρόταση η οποία παρατίθεται χωρίς απόδειξη (για την απόδειξη βλέπε βιβλίο Hoel, Port, Stone [3], Μετάφραση: Απόστολος Γιαννόπουλος, Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων, σελ. 102-103).

Πρόταση 3.5 Έστω μία τυχαία μεταβλητή X και μία συνάρτηση $g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ τέτοια ώστε η $g(X)$ να είναι επίσης μία τυχαία μεταβλητή. Τότε (α) $E(g(X)) = \sum_x g(x)P(X=x)$, αν $\sum_x |g(x)| P(X=x) < \infty$ και η X είναι

διακριτή (β) $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$, αν $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x) dx < \infty$ και η X είναι συνεχής. ■

Πρόταση 3.6 Ισχύει ότι $E(aX + b) = aEX + b$, $a, b \in \mathcal{R}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει στην περίπτωση που η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.

$$\text{Είναι } E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f_X(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = aEX + b. \blacksquare$$

Πρόταση 3.7 Αν $X = c$, τότε $EX = c$.

Απόδειξη. Έστω ότι η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή. Είναι $EX = \sum_x xP(X=x) = c \sum_x P(X=x) = c$. ■

Πρόταση 3.8 Ισχύει ότι $|EX| \leq E|X|$.

Απόδειξη. Είναι $-|X| \leq X \leq |X| \Rightarrow |X| - X \geq 0$ και $|X| + X \geq 0$.

Επομένως, $E\{|X| - X\} \geq 0$ και $E\{|X| + X\} \geq 0$.

Άρα, $\int_{-\infty}^{\infty} (|x| - x) f_X(x) dx \geq 0$ και $\int_{-\infty}^{\infty} (|x| + x) f_X(x) dx \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \geq - \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx$$

$E|X| \geq EX$ και $EX \geq -E|X|$. Άρα, $-E|X| \leq EX \leq E|X|$ και συνεπώς, $|EX| \leq E|X|$. ■

3.8 Ροπές τυχαίων μεταβλητών

Οι ροπές (moments) μιας τυχαίας μεταβλητής, που θα ορίσουμε στο παρόν εδάφιο, παρέχουν επιπρόσθετες χρήσιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά μιας τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός (Ροπή k -τάξεως). Έστω X μία τυχαία μεταβλητή. Η **ροπή k -τάξεως**, $k=1,2,\dots$ της X ή της κατανομής της είναι η ποσότητα $\mu_k := EX^k$ ή ισοδύναμα $\mu_k = \sum_x x^k P(X=x)$, αν η X είναι διακριτή,

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx, \text{ αν η } X \text{ είναι συνεχής.}$$

Παρατηρούμε ότι για $k=1$, $\mu_1 = EX$, δηλαδή η ροπή πρώτης τάξεως συμπίπτει με τη μέση τιμή της X .

Ορισμός (Κεντρική ροπή k -τάξεως). Έστω X μία τυχαία μεταβλητή. Η **κεντρική ροπή** (central moment) k -τάξεως, $k=1,2,\dots$ της X ή της κατανομής της είναι η ποσότητα $\mu'_k := E(X - EX)^k$, ή ισοδύναμα

$$\mu'_k = \sum_x (x - E(X))^k P(X=x), \text{ αν η } X \text{ είναι διακριτή, } \mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^k f_X(x) dx, \text{ αν η } X \text{ είναι συνεχής.}$$

Για $k=2$, η κεντρική ροπή δευτέρας τάξεως της X καλείται **διασπορά (ή διακύμανση)** (variance) της X και γράφουμε $\mu'_2 := \text{Var}(X) = \sigma^2$. Η διασπορά δίνει ένα μέτρο της διάχυσης της κατανομής της X γύρω από τη μέση τιμή της. Όσο περισσότερο αποκλίνει η X από τη μέση τιμή της τόσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά $(X - EX)^2$ άρα και η διασπορά. Η θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς καλείται **τυπική απόκλιση** (standard deviation) της X και γράφουμε $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$. Η διασπορά (ή η τυπική απόκλιση) αποτελεί ένα μέτρο του κατά πόσο διασπαρμένες είναι οι τιμές μίας τυχαίας μεταβλητής περί τη μέση τιμή της. Εάν οι διάφορες δυνατές τιμές της τυχαίας μεταβλητής είναι συγκεντρωμένες κοντά στη μέση τιμή, η διασπορά είναι μικρή, ενώ εάν είναι αρκετά διασπαρμένες, η διασπορά είναι μεγάλη.

Συχνά μία κατανομή δεν είναι συμμετρική, δηλαδή δεν υπάρχει τιμή της τυχαίας μεταβλητής ως προς την οποία η συνάρτηση πιθανότητας ή η συνάρτηση πυκνότητας να είναι συμμετρική. Σε τέτοιες περιπτώσεις η κατανομή παρουσιάζει συχνά μία «ουρά» είτε προς τα δεξιά οπότε προκύπτει μία κατανομή ασύμμετρη προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά οπότε προκύπτει μία κατανομή ασύμμετρη προς τα αριστερά. Η ποσότητα $\alpha = \frac{\mu_3'}{\sigma^3}$ είναι γνωστή ως **μέτρο ασυμμετρίας** της X , διότι δείχνει πόσο συμμετρική ($\alpha = 0$) ή ασύμμετρη ($\alpha > 0$ ή $\alpha < 0$) είναι η συνάρτηση πιθανότητας ή η συνάρτηση πυκνότητας της X . Αν $\alpha > 0$ η κατανομή είναι ασύμμετρη προς τα δεξιά και αν $\alpha < 0$ η κατανομή είναι ασύμμετρη προς τα αριστερά. Στη σελίδα 238, στο Σχήμα 4.19 του βιβλίου των Κουνιά & Μωυσιάδη [6], παρουσιάζονται γραφικά και οι τρεις περιπτώσεις συμμετρίας ή ασυμμετρίας μίας κατανομής.

Μία κατανομή μπορεί να είναι «συγκεντρωμένη» κοντά στη μέση τιμή, οπότε η καμπύλη που την αναπαριστά παρουσιάζει μία έντονη κύρτωση («καμπούριασμα»). Μπορεί όμως μία κατανομή να μην είναι συγκεντρωμένη κατά αυτό τον τρόπο, οπότε η καμπύλη που την αναπαριστά δεν παρουσιάζει σαφή κύρτωση. Η ποσότητα $\beta = \frac{\mu_4'}{\sigma^4}$ είναι γνωστή ως **μέτρο κύρτωσης** διότι δείχνει πόσο επίπεδη ή μη είναι η συνάρτηση πυκνότητας της X . Όταν η X είναι μία κανονική τυχαία μεταβλητή τότε $\beta = 3$. Σ' αυτή την περίπτωση η κατανομή καλείται **μεσόκυρτη**. Για $\beta > 3$ η σ.π. έχει πιο οξεία μορφή από την κανονική κατανομή και καλείται **λεπτόκυρτη** ενώ για $\beta < 3$ είναι πιο επίπεδη από την κανονική κατανομή και καλείται **πλατύκυρτη**. Στη σελίδα 239, στο Σχήμα 4.20 του βιβλίου των Κουνιά & Μωυσιάδη [6], παρουσιάζονται γραφικά και οι τρεις περιπτώσεις κυρτότητας μίας κατανομής.

Παράδειγμα 28 Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Η ροπή τρίτης τάξεως της X είναι $\mu_3 = EX^3 = \sum_{x=1}^6 x^3 P(X=x) = \sum_{x=1}^6 x^3 \frac{1}{6} = \frac{21^2}{6}$. ■

Πρόταση 3.9 Ισχύει ότι $Var(X) = EX^2 - (EX)^2$.

Απόδειξη. Είναι $\mu_2' = Var(X) = E(X - \mu_1)^2 = E[X^2 - 2\mu_1 X + \mu_1^2] = EX^2 - 2\mu_1 EX + \mu_1^2 = EX^2 - \mu_1^2$. Άρα, $\mu_2' = EX^2 - \mu_1^2$ ή ισοδύναμα $Var(X) = EX^2 - (EX)^2$. ■

Ο τύπος της Πρότασης 3.9 είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τον υπολογισμό της διασποράς τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα 29 Έστω $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $p \in [0, 1]$. Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της X .

Λύση. Είναι $EX = \sum_{x=0}^1 xP(X=x) = 0(1-p) + 1p = p$. $EX^2 = \sum_{x=0}^1 x^2P(X=x) = 0(1-p) + 1^2p = p$.

Άρα, $Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p)$. ■

Παράδειγμα 30 Έστω $X \sim \text{Εκθετική}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της X .

Λύση. Είναι $EX = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{\infty} x(e^{-\lambda x})' dx = -[xe^{-\lambda x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = 0 - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} (e^{-\lambda x})' dx = -\left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$.

$EX^2 = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{\infty} x^2 (e^{-\lambda x})' dx = -[x^2 e^{-\lambda x}]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = 0 + \frac{2}{\lambda^2}$.

Άρα, $Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$. ■

Παράδειγμα 31 Έστω $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της X .

Λύση. Είναι $EX = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$.

Η πέμπτη ισότητα προκύπτει αν θέσουμε $n = x - 1$.

$EX^2 = E[X(X-1)] + EX = \lambda + \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda + \sum_{x=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-2)!}$

$= \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda + \lambda^2$.

Η πέμπτη ισότητα προκύπτει αν θέσουμε $n = x - 2$.

Άρα, $Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \lambda$. ■

Παράδειγμα 32 Έστω $X \sim N(0, 1)$. Η σ.π. της X δίνεται από τον τύπο $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$\mu_k = 0$, αν k περιττός.

Λύση. Είναι $\mu_k = EX^k = \int_{-\infty}^0 x^k f_X(x) dx + \int_0^{\infty} x^k f_X(x) dx$. Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $u = -x$ στο πρώτο

ολοκλήρωμα. Θα έχουμε $\mu_k = -\int_{\infty}^0 (-u)^k f_X(-u) du + \int_0^{\infty} x^k f_X(x) dx = -\int_0^{\infty} u^k f_X(u) du + \int_0^{\infty} x^k f_X(x) dx = 0$.

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει διότι k περιττός και f_X άρτια συνάρτηση. ■

Θεωρούμε μία τυχαία μεταβλητή X και τις πραγματικές σταθερές a, b . Ισχύει η ακόλουθη σημαντική πρόταση.

Πρόταση 3.10 (Διασπορά γραμμικού συνδυασμού). $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

Απόδειξη. Είναι $Var(aX + b) = E(aX + b)^2 - [E(aX + b)]^2$

$$= E(a^2 X^2 + b^2 + 2abX) - (aEX + b)^2 = a^2 EX^2 + b^2 + 2abEX - a^2 (EX)^2 - b^2 - 2abEX$$

$$= a^2 [EX^2 - (EX)^2] = a^2 Var(X). \blacksquare$$

3.9 Ανισότητες ροπών και πιθανοτήτων

Όταν υπάρχουν δυσκολίες στον υπολογισμό πιθανοτήτων ή ροπών κάποιων τυχαίων μεταβλητών μπορούμε να υπολογίσουμε κάποια φράγματα αυτών των τιμών με τη βοήθεια κατάλληλων ανισοτήτων.

Πρόταση 3.11 (Ανισότητα του Markov). Έστω μία μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή X και μία σταθερά $c > 0$. Για οποιαδήποτε τιμή του c , ισχύει ότι $P[X \geq c] \leq \frac{E[X]}{c}$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε την ανισότητα για την περίπτωση κατά την οποία η X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π. f_X . Ισχύει ότι

$$E[X] = \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^c x f_X(x) dx + \int_c^{\infty} x f_X(x) dx \geq \int_c^{\infty} x f_X(x) dx \geq \int_c^{\infty} c f_X(x) dx = c \int_c^{\infty} f_X(x) dx = c P[X \geq c]. \blacksquare$$

Πρόταση 3.12 (Ανισότητα του Chebyshev). Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ και πεπερασμένη διασπορά σ^2 . Τότε για κάθε πραγματικό αριθμό $c > 0$, ισχύει ότι $P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Markov για τη μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή $(X - \mu)^2$ και τον αριθμό c^2 . Έχουμε ότι $P((X - \mu)^2 \geq c^2) \leq \frac{E(X - \mu)^2}{c^2} = \frac{\sigma^2}{c^2}$. Επειδή η ανισότητα $(X - \mu)^2 \geq c^2$ είναι ισοδύναμη με την $|X - \mu| \geq c$, έπεται ότι η ανισότητα $P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$ ισχύει. $\blacksquare$

Οι ανισότητες των Markov και Chebyshev παρέχουν κάποια φράγματα για την κατανομή της X όταν είναι γνωστή η μέση τιμή και η διασπορά της. Η ανισότητα του Chebyshev δίνει ένα φράγμα, συναρτήσει της διασποράς της X και της σταθεράς c , για την πιθανότητα η X να αποκλίνει από τη μέση τιμή της

περισσότερο από c . Δεν υποθέτει τίποτε άλλο για την κατανομή της X παρά μόνο το ότι έχει πεπερασμένη διασπορά.

Παράδειγμα 33 Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των ηλεκτρικών λαμπτήρων που παράγονται από ένα εργοστάσιο κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας είναι μία τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu = 50$. (α) Κάντε μία εκτίμηση για την πιθανότητα η παραγωγή των ηλεκτρικών λαμπτήρων κατά τη διάρκεια αυτής της εβδομάδας να ξεπεράσει τον αριθμό 75. (β) Αν η διασπορά της εβδομαδιαίας παραγωγής των ηλεκτρικών λαμπτήρων βρέθηκε ίση με 25 κάντε μία εκτίμηση για την πιθανότητα η εβδομαδιαία παραγωγή των λαμπτήρων να είναι μεταξύ των αριθμών 40 και 60.

Λύση. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των ηλεκτρικών λαμπτήρων που παράγονται κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας.

(α) Από την ανισότητα του Markov, έχουμε $P\{X \geq 75\} \leq \frac{E[X]}{75} = \frac{2}{3}$.

(β) Από την ανισότητα του Chebyshev, έχουμε $P\{|X - 50| \geq 10\} \leq \frac{\sigma^2}{10^2} = \frac{25}{10^2} = \frac{1}{4}$. Επομένως,

$P\{|X - 50| < 10\} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Συνεπώς η πιθανότητα η εβδομαδιαία παραγωγή των ηλεκτρικών λαμπτήρων να είναι μεταξύ των αριθμών 40 και 60 είναι τουλάχιστον ίση με 0.75. ■

Είναι σαφές ότι αν είναι γνωστή η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X , οι πιθανότητες του παραπάνω παραδείγματος θα μπορούσαν να υπολογιστούν με ακρίβεια και δεν θα ήταν απαραίτητη η χρήση των ανισοτήτων Markov και Chebyshev.

Παράδειγμα 34 Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή, $t > 0$ και $a > 0$. Αν υπάρχει η μέση τιμή $E(e^{aX})$, να

δειχτεί ότι ισχύει η ανισότητα $P\left(X < \frac{1}{a} \ln t\right) \geq 1 - \frac{1}{t} E(e^{aX})$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Markov και έχουμε $P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$, $t > 0$. Συνεπώς,

$P(X < t) \geq 1 - \frac{E(X)}{t}$, $t > 0$. Εφαρμόζουμε την παραπάνω ανισότητα για την τυχαία μεταβλητή e^{aX} , $a > 0$ που

είναι πάντα μη-αρνητική για οποιαδήποτε διακριτή τυχαία μεταβλητή X και έχουμε

$P(e^{aX} < t) \geq 1 - \frac{E(e^{aX})}{t}$, $t > 0$. Όμως, για $y \in \mathcal{R}$ και $t > 0$ ισχύει $e^{ay} < t \Rightarrow \ln(e^{ay}) < \ln t \Rightarrow ay < \ln t$ και

συνεπώς για $a > 0$ παίρνουμε $P(e^{aX} < t) = P(aX < \ln t) = P\left(X < \frac{1}{a} \ln t\right)$.

Επομένως, έχουμε ότι $P\left(X < \frac{1}{a} \ln t\right) \geq 1 - \frac{E(e^{aX})}{t}$, $t > 0$. ■

Πρόταση 3.13 (Η ανισότητα του Schwarz). Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξεως. Τότε ισχύει ότι $[E(XY)]^2 \leq [E(X^2)][E(Y^2)]$. Επιπλέον η ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν είτε $P(Y = 0) = 1$ ή $P(X = cY) = 1$, για κάποια σταθερά c .

Απόδειξη. Αν $P(Y = 0) = 1$, τότε $P(XY = 0) = 1$ επομένως $E(XY) = 0$ και $E(Y^2) = 0$. Σε αυτή την περίπτωση η ανισότητα του Schwarz ισχύει ως ισότητα. Επίσης, αν $P(X = cY) = 1$, τότε και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι ίσα με $c^2[E(Y^2)]^2$. Συνεπώς και σε αυτή την περίπτωση η ανισότητα του Schwarz ισχύει ως ισότητα. Για το υπόλοιπο της απόδειξης υποθέτουμε ότι $P(Y = 0) < 1$. Επομένως, $E(Y^2) > 0$. Για κάθε πραγματικό αριθμό λ ισχύει ότι $0 \leq E(X - \lambda Y)^2 = \lambda^2 E(Y^2) - 2\lambda E(XY) + E(X^2)$. Η τελευταία ισότητα είναι μία τετραγωνική συνάρτηση του λ . Αφού $E(Y^2) > 0$ η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης επιτυγχάνεται για κάποια τιμή του λ που υπολογίζεται αν θέσουμε την παράγωγο ίση με μηδέν και επιλύσουμε. Μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε ότι η τιμή του λ που μηδενίζει την παράγωγο είναι ίση με $\lambda^* = [E(XY)][E(Y^2)]^{-1}$. Για την τιμή του λ^* , μετά από πράξεις, καταλήγουμε ότι η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης, είναι $E(X - \lambda^* Y)^2 = E(X^2) - \frac{[E(XY)]^2}{E(Y^2)}$. Επειδή $E(X - \lambda^* Y)^2 \geq 0$, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

3.10 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Αν οι συναρτήσεις $f, g : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ είναι συναρτήσεις πυκνότητας, αποδείξτε ότι και η συνάρτηση $h := \lambda f + (1 - \lambda)g$, όπου $0 \leq \lambda \leq 1$, είναι επίσης συνάρτηση πυκνότητας.

Λύση. Είναι $f, g \geq 0$, $\lambda \in [0, 1]$ και συνεπώς η συνάρτηση $h := \lambda f + (1 - \lambda)g$ είναι μη-αρνητική. Επίσης έχουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + (1 - \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \lambda + (1 - \lambda) = 1$, διότι οι f και g είναι συναρτήσεις πυκνότητας. Άρα, η h είναι μία συνάρτηση πυκνότητας. ■

Άσκηση 2. Υποθέτουμε ότι η X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον τύπο: $f_X(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & x \in (0, 2) \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases}$. (α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c ; (β) Βρείτε την πιθανότητα $P(X > 1)$.

Λύση. Αφού η f_X είναι συνάρτηση πυκνότητας πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ που συνεπάγεται ότι

$c \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = 1$. Η τελευταία σχέση έχει ως συνέπεια ότι $c = \frac{3}{8}$. Επίσης έχουμε ότι

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \int_{-\infty}^1 f_X(x) dx = 1 - \int_0^1 \frac{3}{8} (4x - 2x^2) dx = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

Άσκηση 3. Έστω $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $X(\omega) = c$ για όλα τα $\omega \in \Omega$, όπου c είναι κάποια πραγματική σταθερά. Δείξτε ότι η X είναι μία τυχαία μεταβλητή και βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της. Εξηγήστε γιατί η X είναι διακριτή και βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητάς της.

Λύση. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\} = \Omega$, αν $x \geq c$ και $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\} = \emptyset$, αν $x < c$. Αφού τα σύνολα Ω και $\emptyset$ είναι ενδεχόμενα συμπεραίνουμε ότι η X είναι μία τυχαία μεταβλητή. Η συνάρτηση κατανομής της είναι $F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι $P(X = c) = P(X^{-1}\{c\}) = P(\Omega) = 1$.

Άρα, το μονοσύνολο $\{c\}$ είναι φορέας της X . Συνεπώς η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή. Η συνάρτηση πιθανότητάς της είναι $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x = c \\ 0, & x \neq c \end{cases}. \blacksquare$

Άσκηση 4. Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$. Ορίζουμε

$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $Y(\omega) = [X(\omega)]$, όπου $[x] = \max\{n: n \text{ ακέραιος}, n \leq x\}$. Δείξτε ότι η Y είναι μία τυχαία μεταβλητή και βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητάς της.

Λύση. Για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\{\omega \in \Omega: [X(\omega)] \leq x\} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) < [x] + 1\}$. Αφού η X είναι τυχαία μεταβλητή, το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας είναι ενδεχόμενο. Συνεπώς και το πρώτο μέλος το οποίο από τον ορισμό της Y είναι το σύνολο $\{\omega \in \Omega: Y(\omega) \leq x\}$, είναι ενδεχόμενο. Άρα, η Y είναι τυχαία μεταβλητή. Για $i = 0, 1, \dots$ η τιμή της συνάρτησης πυκνότητας της Y βρίσκεται ως εξής:

$$f_Y(i) = P(Y = i) = P([X] = i) = P(i \leq X < i+1) = \int_i^{i+1} e^{-x} dx = (1 - e^{-1})e^{-i}.$$

Προφανώς, $f_Y(i) = 0$, για κάθε $y \in \mathfrak{R} - \{0, 1, \dots\}$. ■

Άσκηση 5. Έστω X μία τυχαία μεταβλητή. Δείξτε ότι η συνάρτηση $Y = \min(X, 0)$ είναι επίσης τυχαία μεταβλητή.

Λύση. Για $x \geq 0$, $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega : \min(X(\omega), 0) \leq x\} = \Omega \in \mathfrak{F}$. Για $x < 0$,

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega : \min(X(\omega), 0) \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}.$$

Συνεπώς η Y είναι τυχαία μεταβλητή. ■

Άσκηση 6. Για να καταδικαστεί ένας κατηγορούμενος από ένα δικαστήριο που αποτελείται από δώδεκα ενόρκους πρέπει να κριθεί ένοχος από τουλάχιστον οκτώ ενόρκους. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα να είναι ένοχος ο κατηγορούμενος είναι ίση με a και ότι ο κάθε ένορκος ανεξάρτητα από τους άλλους, παίρνει τη σωστή απόφαση με πιθανότητα θ . Ποια είναι η πιθανότητα να είναι σωστή η απόφαση του δικαστηρίου;

Λύση. Θεωρούμε το ενδεχόμενο A : η απόφαση του δικαστηρίου είναι σωστή και B : ο κατηγορούμενος είναι ένοχος. Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας θα έχουμε: $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$.

$$\text{Όμως, } P(B) = a \text{ και } P(B^c) = 1 - a. \text{ Επίσης, } P(A|B) = \sum_{i=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i} \text{ και}$$

$$P(A|B^c) = \sum_{i=5}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}. \quad \blacksquare$$

Άσκηση 7. Υποθέτουμε ότι στην τσέπη σας υπάρχουν N νομίσματα, όπου N είναι ένας τυχαίος αριθμός που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ , $\lambda > 0$. Έστω ότι βγάζετε ένα-ένα τα νομίσματα από την τσέπη σας και τα ρίχνετε στο πάτωμα. Η πιθανότητα να εμφανιστούν γράμματα σε κάθε ρίψη είναι ίση με p , $0 < p < 1$. Δείξτε ότι ο συνολικός αριθμός των εμφανιζόμενων γραμμάτων ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λp .

Λύση. Έστω H ο συνολικός αριθμός των εμφανιζόμενων γραμμάτων. Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας δεσμευόμαστε ως προς τον αριθμό των νομισμάτων που υπάρχουν στην τσέπη μας και έχουμε διαδοχικά:

$$P(H = x) = \sum_{n=x}^{\infty} P(H = x | N = n)P(N = n) = \sum_{n=x}^{\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \frac{(\lambda p)^x e^{-\lambda p}}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{\{\lambda(1-p)\}^{n-x} e^{-\lambda(1-p)}}{(n-x)!}.$$

Το άθροισμα της τελευταίας ισότητας ισούται με τη μονάδα αφού είναι το άθροισμα των τιμών της συνάρτησης μάζας πιθανότητας που αντιστοιχεί στην κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda(1-p)$. ■

Άσκηση 8. Η πιθανότητα να είναι φουλ ένα χέρι του πόκερ είναι ίση με 0.00144. Ποια είναι κατά προσέγγιση η πιθανότητα τουλάχιστον δύο από τα 1000 χέρια του πόκερ να είναι φουλ;

Λύση. Έστω $X :=$ αριθμός φουλ από τα 1000 χέρια του πόκερ. Προφανώς $X \sim \text{Bin}(1000, 0.00144)$. Προσεγγίζουμε τη διωνυμική κατανομή με τη Poisson κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1000 \cdot 0.00144 = 1.44$. Άρα, κατά προσέγγιση, έχουμε $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda} \lambda = 1 - 2.44e^{-1.44}$. ■

Άσκηση 9. Αν $X \sim \text{Ομοιόμορφη}(0, 1)$ τότε $Y = -\log X \sim \text{Εκθετική}(1)$.

Λύση. Για $y > 0$ έχουμε

$$F_Y(y) = P(-\log X \leq y) = P(\log X^{-1} \leq \log e^y) = P(X^{-1} \leq e^y) = P(X \geq e^{-y}) = 1 - F_X(e^{-y}) = 1 - e^{-y}$$

Για $y \leq 0$ έχουμε $F_Y(y) = P(X \geq e^{-y}) = 0$. Συνεπώς, $Y \sim \text{Εκθετική}(1)$. ■

Άσκηση 10. Ένας ηλεκτρολόγος αγοράζει κουτιά το καθένα από τα οποία περιέχει δέκα ηλεκτρικούς λαμπτήρες. Η πολιτική του είναι να διαλέγει κατά τυχαίο τρόπο τρεις λαμπτήρες από κάθε κουτί, να τους εξετάζει, και να αγοράζει το κουτί εφόσον και οι τρεις λαμπτήρες δεν είναι ελαττωματικοί. Αν 30% των κουτιών περιέχουν τέσσερις ελαττωματικούς λαμπτήρες και 70% περιέχουν μόνον έναν ελαττωματικό λαμπτήρα, ποιο είναι το ποσοστό των κουτιών που ο ηλεκτρολόγος απορρίπτει;

Λύση. Θεωρούμε το ενδεχόμενο A : ο ηλεκτρολόγος δέχεται να αγοράσει ένα κουτί. Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε

$$P(A) = P(A | \text{το κουτί περιέχει 4 ελαττωματικούς λαμπτήρες}) \frac{3}{10} + P(A | \text{το κουτί περιέχει έναν ελαττωματικό λαμπτήρα}) \frac{7}{10}$$

Για τον υπολογισμό των δεσμευμένων πιθανοτήτων παρατηρούμε ότι έχουμε υπεργεωμετρικές κατανομές.

$$\text{Συνεπώς, } P(A | \text{το κουτί περιέχει 4 ελαττωματικούς λαμπτήρες}) = \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}.$$

$$P(A | \text{το κουτί περιέχει 1 ελαττωματικό λαμπτήρα}) = \frac{\binom{1}{0} \binom{9}{3}}{\binom{10}{3}}.$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι $P(A) = \frac{54}{100}$. Επομένως ο ηλεκτρολόγος απορρίπτει το 46% των κουτιών. ■

Άσκηση 11. Η διάρκεια λειτουργίας μιας λυχνίας ραδιοφώνου ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{200}$ ώρες. Το εργοστάσιο που κατασκευάζει τις λυχνίες επιθυμεί να δώσει εγγύηση στους πελάτες για ορισμένο αριθμό ωρών. Εάν μία λυχνία καεί νωρίτερα, επιστρέφεται στο εργοστάσιο. Ποιος αριθμός ωρών πρέπει να δοθεί σαν εγγύηση έτσι ώστε το πολύ 5% των λυχνιών να επιστρέφονται στο εργοστάσιο;

Λύση. Έστω T : η διάρκεια ζωής μιας λυχνίας, $T \sim \text{Εκθετική}\left(\frac{1}{200}\right)$. Έστω t ο αριθμός των ζητούμενων ωρών. Πρέπει $P(T \leq t) \leq 0.05 \Leftrightarrow P(T > t) \geq 0.95 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{200}t} \geq 0.95 \Leftrightarrow t \leq -200 \cdot \log(0.95) \cong 4.4552$. Σύνεπως, ως εγγύηση θα πρέπει να δοθούν, για την κάθε λυχνία, πέντε ώρες λειτουργίας. ■

Άσκηση 12. Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\mu = 3$ και $\sigma^2 = 9$, δείξτε ότι $P(X > 9) + P(X < -3) = 0.0456$. Χρησιμοποιήστε τους πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής (βλέπε βιβλίο Γ. Γρ. Ρούσσα [1], σελ. 292-294).

Λύση. Είναι $P(X > 9) + P(X < -3) = P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{9-3}{3}\right) + P\left(\frac{X-3}{3} < \frac{-3-3}{3}\right) = P(Z > 2) + P(Z < -2)$
 $= 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) = 2[1 - \Phi(2)] = 2(1 - 0.9772) = 0.0456$, όπου $Z \sim N(0, 1)$. ■

Άσκηση 13. Έστω ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, όπου $\mu = 5$ και σ άγνωστο. Με τη βοήθεια των πινάκων της τυπικής κανονικής κατανομής (βλέπε βιβλίο Γ. Γρ. Ρούσσα [1], σελ. 292-294) υπολογίστε την τιμή του σ αν ισχύει η ακόλουθη σχέση: $P(4 \leq X \leq 6) + P(X \leq 5 - 1.25\sigma) = 1.0066$.

Λύση. Είναι $1.0066 = P(4 \leq X \leq 6) + P(X \leq 5 - 1.25\sigma) = P\left(-\frac{1}{\sigma} \leq \frac{X-5}{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma}\right) + P\left(\frac{X-5}{\sigma} \leq -1.25\right)$
 $= P\left(-\frac{1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) + P(Z \leq -1.25) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right) + \Phi(-1.25) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi(1.25) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - 0.8944$
 $\Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0.9505 \Rightarrow \frac{1}{\sigma} = 1.65 \Rightarrow \sigma = 0.6061$. ■

Άσκηση 14. Το ύψος των ανδρών ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 167 \text{ cm}$ και διασπορά $\sigma^2 = 9 \text{ cm}$. Σε ένα τυχαίο δείγμα τεσσάρων ανδρών ποια είναι η πιθανότητα να έχουν όλοι ύψος μεγαλύτερο από 170 cm ;

Λύση. Αν $X \sim N(167, 9)$ τότε $p = P(X > 170) = 1 - P\left(\frac{X - 167}{3} \leq \frac{170 - 167}{3}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.16$.

Έστω $Y :=$ αριθμός ανδρών στο δείγμα των τεσσάρων ανδρών με ύψος μεγαλύτερο από 170 cm. Τότε,

$$Y \sim \text{Bin}(4, p). \text{ Άρα, } P(Y = 4) = \binom{4}{4} p^4 (1-p)^{4-4} = (0.16)^4 = 0.0007. \blacksquare$$

Άσκηση 15. Η ετήσια βροχόπτωση (σε ίντσες) σε μία περιοχή ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu = 40$ και $\sigma^2 = 16$. Ποια είναι η πιθανότητα να ξεπεράσει η βροχόπτωση τις 50 ίντσες για πρώτη φορά μετά από τέσσερα χρόνια; Αναφέρετε ποιες υποθέσεις κάνετε.

Λύση. Έστω ότι $X \sim N(40, 16)$. $p = P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - P\left(\frac{X - 40}{4} \leq \frac{50 - 40}{4}\right) = 1 - \Phi(2.5)$

$= 1 - 0.9938 = 0.0062$. Υποθέτουμε ότι οι βροχοπτώσεις των διαφορετικών ετών είναι ανεξάρτητες. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $(1-p)^3 p = (0.9938)^3 0.0062 = 0.006$. Ο υπολογισμός της πιθανότητας βασίστηκε στη γεωμετρική κατανομή. ■

Άσκηση 16. Ο αριθμός των ετών λειτουργίας ενός ραδιοφώνου ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{8}$. Αν ένας φοιτητής αγοράσει ένα ραδιόφωνο το οποίο λειτουργεί κατά τη στιγμή της αγοράς του, ποια είναι η πιθανότητα να λειτουργεί μετά από οκτώ επιπρόσθετα χρόνια;

Λύση. Έστω ότι κατά τη στιγμή της αγοράς του το ραδιόφωνο έχει συμπληρώσει x έτη λειτουργίας. Αν $X :=$ αριθμός ετών λειτουργίας του ραδιοφώνου, τότε αφού η εκθετική κατανομή είναι αμνήμων, έχουμε:

$$P(X > 8 + x | X > x) = P(X > 8) = e^{-\frac{1}{8} \cdot 8} = e^{-1}. \blacksquare$$

Άσκηση 17. Βρείτε τη μέση τιμή EX , όπου X είναι το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού.

Λύση. Έχουμε $P(X = i) = \frac{1}{6}$, $i = 1, \dots, 6$. Άρα, $EX = \sum_{i=1}^6 P(X = i) \cdot i = \frac{7}{2}$. ■

Άσκηση 18. Η συνάρτηση κατανομής της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο:

$$F_X(x) = c(ax^b - bx^a)I_{[0,1]}(x), \text{ όπου } I_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}, \quad a > b > 0 \text{ και } c \in \mathfrak{R}. \text{ Δείξτε ότι η ροπή } k\text{-τάξεως}$$

$$\text{της } X \text{ δίνεται από τον τύπο: } EX^k = \frac{ab}{(a+k)(b+k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Λύση. Η συνάρτηση πυκνότητας της X είναι $f_X(x) = F'_X(x) = cab(x^{b-1} - x^{a-1})I_{[0,1]}(x)$. Από τη σχέση

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \text{ μετά από πράξεις, έχουμε ότι } c = (a-b)^{-1}.$$

$$\text{Μετά από πράξεις, έχουμε } EX^k = \frac{ab}{a-b} \int_0^1 x^k (x^{b-1} - x^{a-1})dx = \frac{ab}{(a+k)(b+k)}. \blacksquare$$

Άσκηση 19. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F_X και F_Y , αντίστοιχα. Βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $Z = \min(X, Y)$.

Λύση. Είναι $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\min(X, Y) \leq z) = 1 - P(\min(X, Y) > z) = 1 - P(X > z, Y > z)$
 $= 1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - [1 - P(X \leq z)][1 - P(Y \leq z)] = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$. Η πέμπτη ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών X και Y . ■

Άσκηση 20. Είστε στο σπίτι σας και εσείς και οι καλεσμένοι σας έχετε παραγγείλει κοτόπουλο από το εστιατόριο Α και πίτσα από το εστιατόριο Β. Θεωρήστε ότι δώσατε και τις δύο παραγγελίες την ίδια χρονική στιγμή. Ο χρόνος παράδοσης είναι τυχαίος και ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $1/30$ για το εστιατόριο Α και την εκθετική κατανομή με παράμετρο $1/20$ για το εστιατόριο Β. Οι χρόνοι αυτοί θεωρήστε ότι είναι ανεξάρτητοι. Πόσο θα περιμένετε κατά μέσο όρο μέχρι να αρχίσετε το γεύμα σας; Για λόγους ευγένειας αρχίζετε το γεύμα σας μόλις παραδοθούν και οι δύο παραγγελίες.

Λύση. Εάν $F(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του μέγιστου χρόνου $X = \max(X_A, X_B)$ τότε

$$F(x) = P(\max(X_A, X_B) \leq x) = P(X_A \leq x, X_B \leq x) = P(X_A \leq x)P(X_B \leq x) = (1 - e^{-\frac{x}{30}})(1 - e^{-\frac{x}{20}})$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{30}} - e^{-\frac{x}{20}} + e^{-\frac{x}{12}}.$$

Η τρίτη ισότητα προκύπτει από την ανεξαρτησία των X_A, X_B . Άρα η πυκνότητα $f(x)$ της X είναι

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}} + \frac{1}{20}e^{-\frac{x}{20}} - \frac{1}{12}e^{-\frac{x}{12}}. \text{ Η μέση τιμή είναι}$$

$$E(X) = \int_0^\infty x \left(\frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}} + \frac{1}{20}e^{-\frac{x}{20}} - \frac{1}{12}e^{-\frac{x}{12}} \right) dx = 30 + 20 - 12 = 38. \blacksquare$$