ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ 05/02/2003

1) Η Αξιοπιστία ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού είναι ένας πραγματικός αριθμός p, $0 \leq p \leq 1$, όπου p είναι η πιθανότητα ένα ψηφίο που παραλείφθηκε να είναι ακριβώς εκείνο που αποστάλθηκε. Άρα από τον ορισμό, το χειρότερο κανάλι είναι το πρώτο με $p = 0.3$ και το καλύτερο το τρίτο με $p = 0.6$. Θα μπορούσαμε από το πρώτο να φτιάχναμε ένα τέταρτο κανάλι με τον εξής τρόπο:

Στην παραλαβή, εάν λάβουμε 1 με χρήση του πρώτου καναλιού να το μετατρέψουμε σε 0.
Στην παραλαβή, εάν λάβουμε 0 με χρήση του πρώτου καναλιού να το μετατρέψουμε σε 1.

Είναι φανερό από την κατασκευή ότι η αξιοπιστία του τέταρτου καναλιού είναι ίση με $1 - p = 1 - 0.3 = 0.7$ δηλαδή η καλύτερη απ' όλες.

2) Οι κώδικες C_1, C_2 που δόθηκαν έχουν ακριβώς το ίδιο πλήθος λέξεων που ανιχνεύουν και το ίδιο πλήθος λέξεων που διορθώνουν. Συγκεκριμένα ο C_1 ανιχνεύει όλες τις λέξεις που ανήκουν στο $K^3 - \{001, 101, 001\}$ και ο C_2 ανιχνεύει όλες τις λέξεις που ανήκουν στο $K^3 - \{100, 010, 110\}$. Πράγματι για τον C_1 δεν ανιχνεύονται οι λέξεις:

$$\begin{aligned} 001 + 101 &= 100 \\ 001 + 100 &= 101 \\ 101 + 100 &= 001 \end{aligned}$$

Όμοια για τον C_2 :

$$\begin{aligned} 101 + 011 &= 110 \\ 101 + 111 &= 010 \\ 011 + 111 &= 100 \end{aligned}$$

Ο C_1 διορθώνει μόνο εκείνα τα σφάλματα που έχουν (*) σε κάθε στήλη του IMLD πίνακα. Κάνοντας τον IMLD για τον C_1 βλέπουμε εύκολα ότι διορθώνει τα 000 και 010.
Όμοια ο C_2 διορθώνει τα 000 και 001. Άρα τελικά οι C_1, C_2 δεν μας κάνουν για το ζητούμενο παράδειγμα. Αν όμως αλλάξουμε το C_2 σε $C_3 = \{100, 011, 111\}$ τότε βλέπουμε ότι πράγματι ο C_3 διορθώνει λιγότερες λέξεις (μόνο την 000).

3) Για να κατασκευάσουμε τις ζητούμενες βάσεις χρησιμοποιούμε διαδοχικά πρώτα τον Αλγόριθμο 2.5.1 για τον $\langle S \rangle$ και στην συνέχεια τον Αλγόριθμο 2.5.7 για τον $S^{\perp}$. Έτσι κατ' αρχήν φέρνουμε τον πίνακα A με γραμμές τις λέξεις του S σε RREF μορφή (ανηγμένη άνω κλιμακωτή).

$$S \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα μια βάση του $\langle S \rangle$ είναι ο γεννήτορας πίνακας

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 01 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι μη μηδενικές γραμμές του του G αποτελούν τα βασικά διανύσματα.

Χρησιμοποιώντας τώρα τον Αλγόριθμο 2.5.7 βρίσκουμε τον parity check πίνακα H του οποίου οι στήλες είναι η ζητούμενη βάση του $S^{\perp}$.
Από τον G έχουμε

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$H = \begin{pmatrix} X \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οπότε τελικά βλέπουμε ότι ο κώδικας $C = \langle S \rangle$ συμπίπτει με τον δυϊκό του.

4) Κατ' αρχήν οι στήλες του H είναι μια βάση του $C^{\perp}$. Άρα η διάσταση του $C^{\perp}$ είναι 2. Όμως $n = 4$ και άρα η διάσταση του C είναι $n - k = 2$. Δηλαδή έχει δυο γραμμικά ανεξάρτητες κωδικολέξεις. Άρα έχουμε $2^{n-k=4}$ διαφορετικά σύμπλοκα. Ένα απ' αυτά είναι το C με οδηγό συμπλόκου την μηδενική κωδικολέξη 0000. Γνωρίζουμε ότι οι λέξεις u που ανήκουν σε διαφορετικά σύμπλοκα έχουν διαφορετικές σύνδρομες uH. Κάνοντας λίγες δοκιμές μπορούμε να δούμε ότι οι λέξεις $0000, 1000, 0100$ και 0001 όλες δίνουν διαφορετικές σύνδρομες και άρα ανήκουν σε διαφορετικά σύμπλοκα. Όμως αυτές οι λέξεις είναι και ελαχίστου βάρους (ίσου με 0 ή 1) και άρα αποτελούν και τους οδηγούς των συμπλόκων, στα οποία ανήκουν δηλαδή :

ΟΔΗΓΟΙ ΣΥΜΠΛΟΚΟΥ	ΣΥΝΔΡΟΜΕΣ
0000	00
1000	10
0100	11
0001	01

Επειδή έχουμε μη πλήρη αποκωδικοποίηση (IMLD) πρέπει να αποκλείσουμε τη δεύτερη γραμμή διότι η 1000 και η 0010 ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο και έχουν το ίδιο ελάχιστο βάρος. Πράγματι $1000H = 10 = 0010H$. Άρα τελικά η ζητούμενη SDA είναι :

ΟΔΗΓΟΙ ΣΥΜΠΛΟΚΟΥ	ΣΥΝΔΡΟΜΕΣ
0000	00
0100	11
0001	01

5) Για να είναι ένας γραμμικός κώδικας C τέλειος θα πρέπει η απόσταση του d να είναι περιττός αριθμός $= 2t + 1$ και

$$|C| = \frac{2^n}{\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ t \end{pmatrix}}$$

Όμως για $n = 7$ και $d = 3$ παίρνουμε $t = 1$ και άρα για να είναι τέλειος θα πρέπει

$$|C| = \frac{2^7}{\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{2^7}{8} = 2^4$$

Άρα θα πρέπει ο C να έχει διάσταση 4.