

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

1. Βρείτε τον γενικό όρο των παρακάτω ακολουθιών:

(i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

(ii) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$

2. Βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των παρακάτω ακολουθιών:

$$(\sqrt{n^2 + 3n} - n), \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^3}\right), (2^{n!}), \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\right).$$

3. (a) Να δείξετε ότι οι ακολουθίες (α_n) , (β_n) , (γ_n) , (δ_n) με

$$\alpha_n = \frac{3n^2 + n + 2}{n^2 - n + 1}, \quad \beta_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\gamma_n = \frac{n + 30}{n + 10}, \quad \delta_n = \sqrt{n + 3} - \sqrt{n + 5}$$

είναι φραγμένες.

(b) Εξετάστε εάν η ακολουθία (α_n) που δίνεται από την αναδρομική σχέση $\alpha_{n+1} = \sqrt{\frac{\alpha_n + 1}{2}}$ με $\alpha_1 = 1$ είναι φραγμένη.

4. Δείξτε ότι η ακολουθία (α_n) είναι αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) αν και μόνο αν η ακολουθία $(-\alpha_n)$ είναι φθίνουσα (αντίστοιχα αύξουσα).
5. Έστω (α_n) , (β_n) δύο μονότονες ακολουθίες. Εξετάστε εάν το άθροισμα $(\alpha_n + \beta_n)$ και το γινόμενο $(\alpha_n \beta_n)$ είναι μονότονες ακολουθίες.
6. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι ακολουθίες (α_n) , (β_n) , (γ_n) , (δ_n) με

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad \beta_n = \frac{n + 4}{n^2 + 1},$$

$$\gamma_n = \frac{100^n}{n!} \quad \text{και} \quad \delta_n = \frac{n^2 + \cos n}{n + 2}.$$