ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

# ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Ιούνιος 2012

ΟΛΕΣ ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΕΠΑΡΚΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ

1. Να βρείτε το αντίστροφο του 295 στην ομάδα $\mathbb{Z}^*_{1468}$. 13 μ

2. Γράψτε την μετάθεση

   $$\sigma = (3\ 2\ 1)^{1892}(2\ 3\ 4\ 5)^{-2001}(5\ 2\ 3\ 9)^{2012}(5\ 6\ 7)^{17}(6\ 7\ 8\ 5\ 4\ 3)^{2013}$$

   ως γινόμενο ξένων κύκλων και βρείτε την τάξη της.

   14 μ

3. Για κάθε μια από παρακάτω ομάδες να εξετάσετε αν είναι ισόμορφη με κάποια από τις υπόλοιπες.
   $S_6$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $U(\mathbb{Z}_{12})$. 14 μ

4. (i) Να διατυπώσετε το θεώρημα Lagrange, και να δείξετε ότι η τάξη ενός στοιχείου μιας πεπερασμένης ομάδας διαιρεί την τάξη της ομάδας.

   (ii) Να βρείτε όλα τα στοιχεία της $U(\mathbb{Z}_{36})$ και να δείξετε ότι $x^{36} = 1$ για κάθε $x \in U(\mathbb{Z}_{36})$. 15 μ

5. Ποια από τα εξής πολυώνυμα είναι ανάγωγα;

   (i) $f(x) = x^3 + 7x + 7$ στο $\mathbb{Z}_{11}[x]$, και

   (ii) $g(x) = x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 4$ στο $\mathbb{Z}_5[x]$.

   14 μ

6. Να εξετάσετε αν το σύνολο $S = \{p + 5q\sqrt{3} : p, q \in \mathbb{Q}\}$ είναι

   (i) υποδακτύλιος του $\mathbb{R}$, και

   (ii) υπόσωμα του $\mathbb{R}$.

   15 μ

7. Έστω $f(x) = 2x^2 + x + 1$, $H = \langle f(x) \rangle$ και $S = \mathbb{Z}_7[x]/H$.

   (i) Να εξετάσετε κατά πόσο το $S$ είναι σώμα, και

   (ii) να βρείτε όλες τις ρίζες του $f(x)$ στο $S$.

   15 μ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Μ. Χαραλάμπους

Απαντήσεις

(1)

$$\begin{array}{r|l} 1468 & 295 \\ \cline{2-2} 1180 & 4 \\ \hline 288 & \end{array}$$

$$a = 1468 = 4 \times \overset{b}{295} + 288$$

$$b = 295 = 1 \times 288 + 7$$

$$288 = 41 \times 7 + 1$$

$$7 = 7 \times 1 + 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 288 - 41 \times 7$$

$$= 288 - 41 \times (b - 288)$$

$$= 42 \times 288 - 41b$$

$$= 42 \times (a - 4b) - 41b$$

$$= 42a - (168 + 41)b$$

$$= 42a - 209b$$

$\Rightarrow$ Στο $Z^*_{1468}$

$$1 = 42 \cdot a - 209b = (-209) \cdot b$$

$$1 = (1468 - 209) \cdot b = 1259 \cdot b$$

$\Rightarrow$ Το αντίστροφο το $b = 295$ είναι το

1259

(2)

$$1892 = 1890 + 2$$

$$-2001 = -4.500 - 1$$

$$2012 = 4.503$$

$$17 = 3.5 + 2$$

$$2013 = 6.335 + 3$$

$$\begin{array}{r|l} 2013 & 6 \\ \underline{18} & 335 \\ 21 & \\ \underline{18} & \\ 33 & \\ \underline{30} & \\ 3 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = (3\,2\,1)^2 (2\,3\,4\,5)^{-1} . e . (5\,6\,7)^2 (6\,7\,8\,5\,4\,3)^3$$

$$= (3\,1\,2)(5\,4\,3\,2)(5\,7\,6)(6\,5)(7\,4)(3\,8)$$

$$= (1\,2\,5\,4\,6\,7)(3\,8)$$

$$\sigma^m = (1\,2\,5\,4\,6\,7)^m (3\,8)^m$$ γιατί οι κύκλοι είναι ξένοι

$$\Rightarrow \quad \sigma^m = e \iff (1\,2\,5\,4\,6\,7)^m = e \text{ και } (3\,8)^m = e$$

$$\iff 6 / m \text{ και } 2/m$$

$$\iff 6/m$$

$\Rightarrow$ η τάξη της $\sigma$ είναι το 6

(3) $|S_6| = 6!$

$U(Z_{12}) = \{1, 5, 7, 11\} \Rightarrow |U(Z_{12})| = 4$

$|Z_2 \times Z_2| = 2 \cdot 2 = 4$

$|Z_2 \times Z_3| = 2 \cdot 3 = 6$

Συνεπώς, μόνο η $Z_2 \times Z_2$ και η $U(Z_{12})$ μπορούν να είναι ισόμορφες.

Τώρα στην $U(Z_{12})$, $5^2 = 7^2 = 11^2 = 1$ = ταυτοτικό

$\Rightarrow$ η $U(Z_{12})$ είναι η ομάδα Klein.

Επίσης, $Z_2 \times Z_2 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ και τα στοιχεία $(1,0), (0,1), (1,1)$ έχουν τάξη 2.

Άρα και η $Z_2 \times Z_2$ είναι η Klein.

Έτσι $U(Z_{12}) \simeq Z_2 \times Z_2$

(4) (i) Θεώρημα Lagrange: Έστω $G$ μια πεπερασμένη ομάδα και $H$ μια υποομάδα της $G$. Τότε

$$|G| = |G:H||H|$$

όπου $|G|$ είναι η τάξη της $G$, $|H|$ είναι η τάξη της $H$ και $|G:H|$ είναι το πλήθος των αριστερών συμπλόκων της $H$ στην $G$.

---

Έστω $a$ στοιχείο πεπερασμένης ομάδας $G$. Η τάξη $o(a)$ του $a$ ισούται με την τάξη της υποομάδας $\langle a\rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ της $G$. Από το θεώρημα Lagrange, $o(a) = \langle a\rangle$ διαιρεί την $|G|$.

---

(ii) $U(\mathbb{Z}_{36}) = \{m : m$ και $36$ σχετικά πρώτοι$\}$
$= \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}$.

---

$$|U(\mathbb{Z}_{36})| = 12$$

Από το δεύτερο μέρος του (i), $\forall x \in U(\mathbb{Z}_{36})$

$x^{12} = 1$ αφού το $12$ είναι πολλαπλάσιο του $o(x)$.

Συνεπώς, $x^{36} = (x^{12})^3 = 1^3 = 1$

(5) (i) $f(x) = x^3+7x+7$ στο $\mathbb{Z}_{11}[x]$

Το $f(x)$ είναι βαθμού 3. Άρα είναι ανάγωγο όταν και μόνο όταν δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}_{11}$.

Τώρα $f(0) = 7 \neq 0$

$f(1) = 1+7+7 = 15 = 4 \neq 0$

$f(2) = 8+14+7 = 29 = 7 \neq 0$

$f(3) = 27+21+7 = 5-1+7 = 11 = 0$ //

$\Rightarrow$ Το $f(x)$ είναι αναγώγιμο στο $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

---

(ii) Παρατηρώ ότι

$$\begin{aligned} g(x) &= x^6+2x^4+2x^2+4 \\ &= x^4(x^2+2)+2(x^2+2) \\ &= (x^4+2)(x^2+2) \end{aligned}$$

Συνεπώς το $g(x)$ είναι αναγώγιμο σε κάθε σώμα.

(6) (i) Έστω $a = p_1 + 5q_1\sqrt{3} \in S$

και $b = p_2 + 5q_2\sqrt{3} \in S$ δηλ. $p_1, p_2, q_1, q_2 \in Q$.

Τότε $a+b = (p_1+p_2) + 5(q_1+q_2)\sqrt{3} \in S$

γιατί $p_1+p_2$ και $q_1+q_2 \in Q$

Επίσης $a.b = (p_1p_2 + 75q_1q_2) + 5(p_1q_2 + p_2q_1)\sqrt{3} \in S$

γιατί $p_1p_2, q_1q_2, p_1q_2$ και $p_2q_1 \in Q$.

Τέλος, $0 = 0 + 5.0.\sqrt{3} \in S$

και $a = p_1 + 5q_1\sqrt{3} \in S \Rightarrow -a = (-p_1) + 5(-q_1)\sqrt{3} \in S$

Συμπεραίνουμε ότι το $\underline{S}$ είναι υποδακτύλιος του $R$

(ii). Το $S$ περιέχει το $1 = 1 + 5\cdot 0\cdot\sqrt{3}$.

Θεωρούμε μη μηδενικό στοιχείο $a = p + 5q\sqrt{3} \in S$,

όπου $p, q \in Q$.

Το αντίστροφό του στο $R$ είναι

$$a^{-1} = \frac{p - 5q\sqrt{3}}{(p - 5q\sqrt{3})(p + 5q\sqrt{3})} = \frac{p - 5q\sqrt{3}}{p^2 - 75q^2}$$

$$= \frac{p}{p^2 - 75q^2} + 5\,\frac{(-q)}{p^2 - 75q^2}$$ που προφανώς ανήκει στο $S$

Συνεπώς το $S$ είναι υπόσωμα του $R$, αφού ήδη γνωρίζουμε ότι είναι υποδακτύλιος του $R$.

(7) (i) $f(x) = 2x^2 + x + 1 = 2(x^2+4x+4)$ στο $\mathbb{Z}_7[x]$

$= 2(x+2)^2$

Προφανώς το $-2 = 5$ είναι μια ρίζα του $f(x)$, που είναι βαθμού 2. Από θεωρία το $S = \mathbb{Z}_7[x]/H$,

όπου $H = \langle f(x) \rangle$ δεν είναι σώμα γιατί το $f(x)$ στο $\mathbb{Z}_7[x]$ είναι αναγώγιμο.

(ii) Τυχαίο στοιχείο του $S$ γράφεται $\alpha = (\lambda x + \mu - 2) + H$, $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_7$

Το $\alpha$ είναι ρίζα του $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $(\alpha+2)^2 = (\lambda x + \mu + H)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 x^2 + 2\lambda\mu x + \mu^2 = k(x+2)^2$

$\Leftrightarrow \lambda^2x^2 + 2\lambda\mu x + \mu^2 = k(x^2+4x+4)$ για κάποιο $k$ στο $\mathbb{Z}_7$ που είναι τέλειο τετράγωνο.

Επειδή, $0^2 = 0$, $(\pm 1)^2 = 1$, $(\pm 2)^2 = 4$, $(\pm 3)^2 = 2$, $k = 0, 1, 2$ ή $4$.

Για $k=0$: $\lambda^2x^2 + 2\lambda\mu x + \mu^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$ και $\alpha = -2 + H$

Για $k=1$: $\lambda^2x^2 + 2\lambda\mu x + \mu^2 = x^2+4x+4 \Rightarrow \lambda = 1, \mu = 2 \Rightarrow \alpha = x + H$

ή $\lambda = -1, \mu = -2 \Rightarrow \alpha = (-x-4) + H$

Για $k=2$: $\lambda^2x^2 + 2\lambda\mu x + \mu^2 = 2x^2+x+1 \Rightarrow \lambda = 3, \mu = -1 \Rightarrow \alpha = (3x-3) + H$

ή $\lambda = -3, \mu = 1 \Rightarrow \alpha = (-3x-1) + H$

Για $k=4$: $\lambda^2x^2 + 2\lambda\mu x + \mu^2 = 4x^2+2x+2 \Rightarrow \lambda = 2, \mu = -3 \Rightarrow \alpha = (2x-5) + H$

ή $\lambda = -2, \mu = 3 \Rightarrow \alpha = (-2x+1) + H$