Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αιγαίου
Εξεταστική Φεβρουαρίου 2011, Θέματα στη Μιγαδική Ανάλυση

Διδάσκων: Μ.Γ. Χαραλάμπους

1. Να γράψετε σε καρτεσιανή μορφή τους αριθμούς $w = \dfrac{(i-1)^8}{(1-i\sqrt{3})^{10}}$ και $Log\, w$.

2. Βρείτε την αχτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum \dfrac{z^{5n}}{(3n)!}$ και $\sum \dfrac{2+3^n}{3+4^n} z^{2n}$.

3. Για ποιες πραγματικές τιμές των λ και μ είναι η $f(z) = e^{x+\lambda y+i\mu y}$ ακέραια;

4. Η $f(z)$ είναι μια ακέραια συνάρτηση με $Ref(z) \geq -\frac{1}{2}$. Να δείξετε ότι η $f(z)$ είναι σταθερή.
   Υπόδειξη: Εξετάστε την $g(z) = \dfrac{f(z)}{f(z)+1}$.

5. Να υπολογίσετε τα εξής ολοκληρώματα:

   (α′) $\displaystyle\int_{|z+1|=5} \frac{1}{(z+1)^5(7+z)} dz$

   (β′) $\displaystyle\int_{|z-1|=5} \frac{1}{(z+5)^5(5-z)} dz$

   (γ′) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2(\cos z - 1)} dz$

   (δ′) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 4x}{9x^2+4} dx$

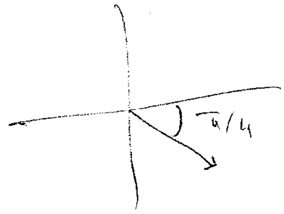
   (ε′) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{3x^2+4}{x^4+5x^2+6} dx$

Καλή Επιτυχία

Σημείωση: Τα θέματα δεν είναι ισοδύναμα.

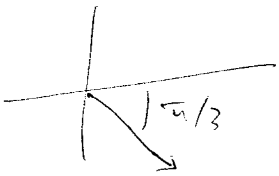
(1)

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



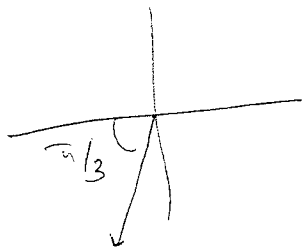
$$= \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$$

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\, e^{-i\pi/3}$$



$$w = \frac{(1-i)^8}{(1-i\sqrt{3})^{10}} = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{-i\frac{\pi}{4}\cdot 8} \cdot 2^{-10} e^{i\frac{\pi}{3}10}$$

$$= 2^4\, e^{-i2\pi}\, 2^{-10}\, e^{i\,-\frac{2\pi}{3}}$$



$$= 2^{-6} \cdot 1 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 2^{-6}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -2^{-7}\left(1+\sqrt{3}i\right)$$

$$\mathrm{Log}\, w = \log|w| + i\,\mathrm{Arg}\, w$$, όπου $w = 2^{-6} e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$$= -6\log 2 - i\frac{2\pi}{3}$$

(2)

(i) $$"\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|" = \frac{|z|^{5(n+1)}}{|z|^{5n}} \, \frac{(3n)!}{(3(n+1))!} = |z|^5 \, \frac{(3n)!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}$$

$$= |z|^5 \, \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to 0$$

Από κριτήριο λόγου, η σειρά συγκλίνει για κάθε z.

$\Rightarrow \quad R = \infty$

(ii) $$"\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|" = \frac{2+3^{n+1}}{3+4^{n+1}} \, \frac{3+4^n}{2+3^n} \, \frac{|z|^{2(n+1)}}{|z|^{2n}}$$

$$= |z|^2 \, \frac{\frac{2}{3^n}+3}{\frac{2}{3^n}+1} \, \frac{3/4^n+1}{3/4^n+4} \to |z|^2 \, \frac{3}{4}$$

Η σειρά συγκλίνει για $|z|^2 \frac{3}{4} < 1 \iff |z| < \frac{2}{\sqrt{3}}$

αποκλίνει $|z|^2 \frac{3}{4} > 1 \iff |z| > \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3. $$f(z) = e^{x+\lambda y} e^{i\mu y} = e^{x+\lambda y}(\cos\mu y + i\sin\mu y)$$

Οπότε $u = \mathrm{Re} f = e^{x+\lambda y}\cos\mu y$

$v = \mathrm{Im} f = e^{x+\lambda y}\sin\mu y$

Οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι και συνεχείς:

$u_x = e^{x+\lambda y}\cos\mu y$ $\quad u_y = e^{x+\lambda y}(\lambda\cos\mu y - \mu\sin\mu y)$

$v_y = e^{x+\lambda y}(\lambda\sin\mu y + \mu\cos\mu y)$, $\quad v_x = e^{x+\lambda y}\sin\mu y$

Συνεπώς, η $f(z)$ είναι παραγωγίσιμη $\iff$ ικανοποιούνται οι C-R

(1) $u_x = v_y \iff \cos\mu y = \lambda\sin\mu y + \mu\cos\mu y$

$\iff (1-\mu)\cos\mu y = \lambda\sin\mu y$

Από εδώ έπεται ότι $\mu \neq 0$

και (2) $u_y = -v_x \iff \lambda\cos\mu y - \mu\sin\mu y = -\sin\mu y$

$\iff \lambda\cos\mu y = -(1-\mu)\sin\mu y$

$\iff (1-\mu)\sin\mu y = -\lambda\cos\mu y$

(1) $\oplus$ (2) $\Rightarrow$ $(1-\mu)^2\cos\mu y\sin\mu y = -\lambda^2\cos\mu y\sin\mu y$

$\Rightarrow (\lambda^2 + (1-\mu)^2)\cos\mu y\sin\mu y = 0$ (3)

Έστω $f(z)$ ακέραια $\Rightarrow$ η (3) ισχύει για $x = y = \frac{\pi}{4\mu} \Rightarrow \lambda^2 + (1-\mu)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ και $\mu = 1$.

Αντίστροφα, αν $\lambda = 0$ και $\mu = 1$, τότε οι (1) και (2) ικανοποιούνται για όλα τα z. Άρα η $f(z)$ είναι ακέραια.

Γράφω την $f(z) = u(z) + i v(z)$, όπου $u(z) = \operatorname{Re} f(z) \geq -\frac{1}{2}$ και $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$.

Τώρα $f(z)+1 = (u(z)+1) + i v(z) \neq 0$ αφού $u(z)+1 \geq \frac{1}{2}$.

Συνεπώς η $g(z) = \dfrac{f(z)}{f(z)+1}$ είναι ακέραια.

Επίσης $(u(z)+1)^2 = u^2(z) + 2u(z) + 1 \geq u^2(z) - 1 + 1 \geq u^2(z)$

Συνεπώς $|g(z)|^2 = \dfrac{u^2(z)+v^2(z)}{(u(z)+1)^2 + v^2(z)} \leq \dfrac{u^2(z)+v^2(z)}{u^2(z)+v^2(z)} \leq 1.$

Άρα η $g(z)$ είναι φραγμένη και ακέραια.

Από το θεώρημα Liouville, η $g(z)$ είναι σταθερή:

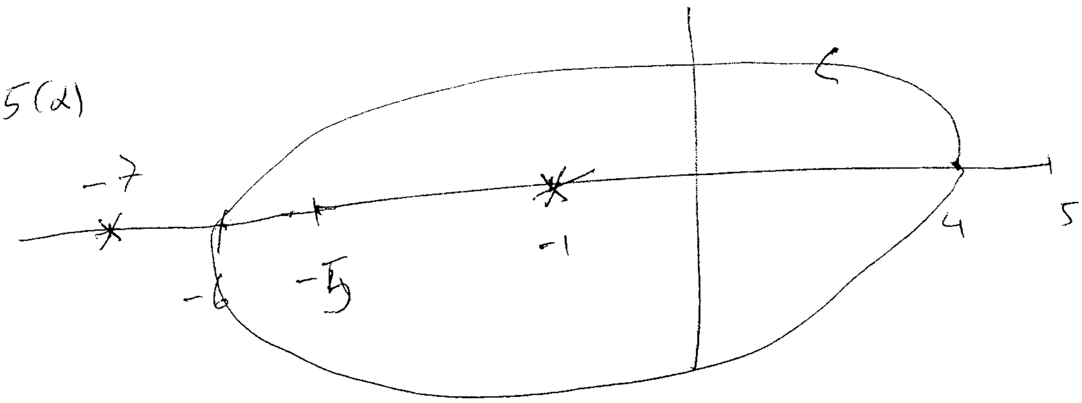
$$g(z) = \frac{f(z)}{f(z)+1} = \lambda \neq 1$$

$$\Rightarrow f(z) = \lambda f(z) + \lambda$$

$$\Rightarrow (1-\lambda) f(z) = \lambda$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\lambda}{1-\lambda}, \text{ σταθερή.}$$

5(α)



Από το γενικευμένο Ολοκληρωτικό Τύπο Cauchy

$$\int_{|z+1|=5} \frac{f(z)}{(z+1)^5} = \frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(-1) = \frac{2\pi i}{4!} 4!\, 6^{-5} = \frac{2\pi i}{6^5}$$

όπου $f(z) = \frac{1}{z+7} = (z+7)^{-1}$

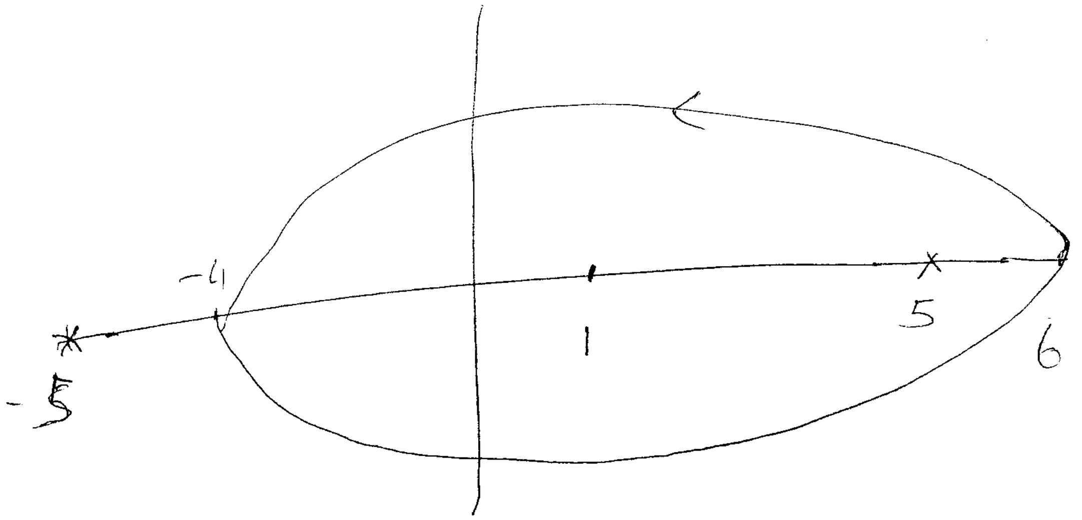
$f'(z) = -(z+7)^{-2}$

$f''(z) = 2(z+7)^{-3}$

$f'''(z) = -6(z+7)^{-4}$

$f^{(4)}(z) = 4!\,(z+7)^{-5}$

5(β)



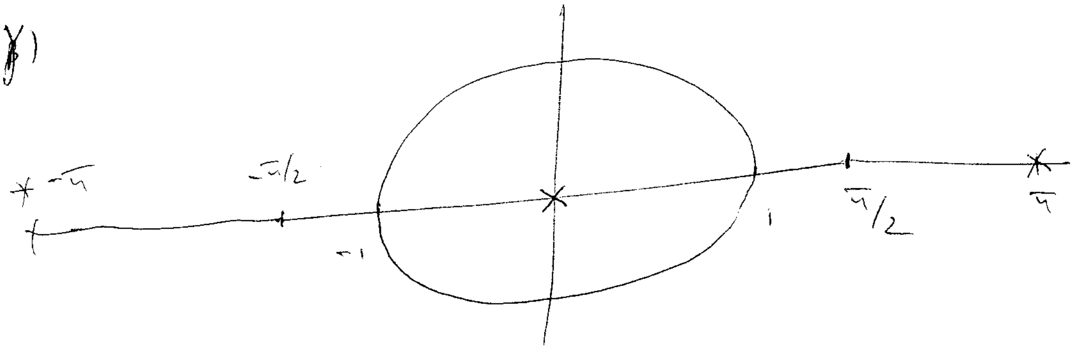
Από τον Ολοκληρωτικό Τύπο Cauchy

$$\int_{|z-1|=5} \frac{dz}{(z+5)^5(5-z)} = \int_{|z-1|} -\frac{1}{(z+5)^5}\,\frac{1}{(z-5)}$$

$$= 2\pi i\, f(5) \quad , \text{όπου} \quad f(z) = -\frac{1}{(z+5)^5}$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{10^5}\right) = -\frac{2\pi i}{10^5}$$

5 (γ)



$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2(\cos z - 1)} \quad . \text{ Από Θ.Ο.Υ.}, \quad \int_{|z|=1} f(z) = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f,0)$$

$$\text{Τώρα } f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z^2\left(-\frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \dots\right)} =$$

$$= \frac{1}{z^3} \, \frac{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots}{-\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}z^2 - \frac{1}{6!}z^4 + \dots} \quad \text{γράφεται ως} = \frac{1}{z^3}\left(a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \dots\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots = \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}z^2 - \frac{1}{6!}z^4\right)\left(a_0 + a_1 z^2 + \dots\right)$$

$$\Rightarrow 1 = -\frac{1}{2}a_0 \Rightarrow a_0 = -2$$

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4!}a_0 = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{6} = \mathrm{Res}(f,0)$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=1} f(z) = 2\pi i \, \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}.$$

5 (δ)

$$y = 4x$$
$$\frac{dy}{dx} = 4$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos 4x}{9x^2+4}\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\cos y}{9\frac{y^2}{16}+4}\,\frac{1}{4}\,dy = 4\int_0^{\infty} \frac{\cos y\,dy}{9y^2+64}$$

Από θεωρία $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos y}{9y^2+64}\,dy + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{9y^2+64}$

$= 2\pi i \operatorname{Res}(f, \frac{8}{3}i)$ όπου

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{9z^2+64} = \frac{1}{9}\,\frac{e^{iz}}{z^2+\frac{64}{9}} = \frac{1}{9}\,\frac{e^{iz}}{(z+i\frac{8}{3})(z-\frac{8}{3}i)}$$

$$\operatorname{Res}(f, \tfrac{8}{3}i) = \frac{1}{9}\,\frac{e^{i\frac{8}{3}i}}{\frac{16}{3}i} = \frac{e^{-8/3}}{48i}$$

Λόγω αρτιότητας της $\cos y/9y^2+64$, $I = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos y\,dy}{9y^2+64}$:

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\pi i\,\frac{e^{-8/3}}{48i} = \frac{\pi}{12}e^{-8/3}$$

5 (ε)

Από θεωρία

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^2+4}{x^4+5x^2+6} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^2+4}{(x^2+2)(x^2+3)}$$

$$= 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f(z), 2i) + \operatorname{Res}(f(z), 3i) \right)$$ όπου

$$f(z) = \frac{3z^2+4}{(z^2+2)(z^2+3)} = \frac{3z^2+4}{(z+\sqrt{2}i)(z-\sqrt{2}i)(z+\sqrt{3}i)(z-\sqrt{3}i)}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-6+4}{2\sqrt{2}i \cdot 1} + \frac{-9+4}{(-3+2)2\sqrt{3}i} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{-2}{\sqrt{2}} + \frac{-5}{(-1)\sqrt{3}} \right)$$

$$= \pi \left(-\sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{3} \left(5\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \right)$$